

DOTTORATO DI RICERCA
in
STORIA DELLE SCIENZE E DELLE TECNICHE COSTRUTTIVE
V ciclo (1989-1992)

Federico Foce

LA TEORIA MOLECOLARE DELL'ELASTICITÀ
DALLA FONDAZIONE OTTOCENTESCA AI NUOVI SVILUPPI DEL XX SECOLO

Relatore: Prof. Edoardo Benvenuto
Coordinatore Dottorato: Prof. Salvatore Di Pasquale

INDICE

Introduzione	p. 1
Cap. I. La duplice fondazione della teoria dell'elasticità.	
I. 1. Precedenti atomistici della meccanica dei solidi.	p. 4
I. 2. Un avvio contraddittorio.	p. 5
I. 3. La definizione di tensione.	p. 9
I. 4. Il problema della conversione delle somme in integrali.	p. 18
I. 5. L'irrisolta polemica fra Navier e Poisson.	p. 28
I. 6. L'"errore premiato" di Wertheim.	p. 34
I. 7. Nuovi spunti risolutivi in Clausius.	p. 38
Cap. II. Il grande dibattito ottocentesco.	
II. 1. In nome del "grand principle".	p. 43
II. 2. Stokes e la "perfetta solidità" della teoria molecolare.	p. 46
II. 3. Gli assiomi di Maxwell.	p. 50
II. 4. La duplice ipotesi di Rankine.	p. 53
II. 5. Jellett e le due ipotesi sulla classificazione dei solidi.	p. 59
II. 6. Contro il Maestro.	p. 63
II. 7. La teoria "matematica" dell'elasticità.	p. 68
II. 8. Le ragioni di Saint-Venant.	p. 72
II. 9. Sguardo sull'opera di Saint-Venant.	p. 75
II.10. Le modellazioni di Thomson sui reticoli cristallini.	p. 81
II.11. Il ruolo di Pearson nella <i>History</i> .	p. 89
II.12. Gli ultimi sostenitori della teoria molecolare.	p. 93

Cap. III. I nuovi traguardi del XX secolo.

III. 1. La risoluzione formale di Poincaré.	p. 96
III. 2. Il contributo di Voigt per una nuova <i>Fernwirkungstheorie</i> .	p. 101
III. 3. La <i>Dynamik der Kristallgitter</i> nell'opera di Born.	p. 110
III. 4. Spunti moderni al dibattito sulle <i>relazioni di Cauchy</i> .	p. 119
III. 5. La nuova controversia sulle costanti elastiche: 21 o 45 ?	p. 122
III. 6. Cenno alle odierne linee di ricerca fra Meccanica del continuo e Fisica dello stato solido.	p. 128
III. 7. Due possibili ipotesi di raccordo fra teoria molecolare e teoria del continuo	p. 132
III. 8. Conclusioni	p. 136

Bibliografia.	p. 138
----------------------	--------

Indice dei nomi	p. 159
------------------------	--------

Ringraziamenti.

Ringraziando i colleghi d'Istituto Antonio Becchi, Antonia Campanella, Massimo Corradi e Bartolomeo Venzano per i proficui scambi di idee, vorrei rivolgere una parola di particolare gratitudine alla Prof.ssa Orietta Pedemonte, preziosa insegnante e materna consigliera, e manifestare la mia sincera riconoscenza verso il Prof. Edoardo Benvenuto, al quale devo gli spunti ed i suggerimenti formanti la sostanza di questo lavoro.

INTRODUZIONE

Addurre ragioni per un lavoro volto a ripercorrere l'evoluzione storica della teoria dell'elasticità nella sua formulazione molecolare sarebbe impegno assai arduo se, aldilà di un dovere istituzionale, il ritrovamento di un prezioso manoscritto di Cauchy, e l'ancor più prezioso commento su di esso¹, la recente apparizione di ricerche affini incentrate sul periodo fondativo di quella teoria² e, non ultimo, l'additata prospettiva di un auspicabile «ritorno alle radici»³ per la moderna *Meccanica dei Materiali* non sollevassero dall'imbarazzo di un tal compito.

In effetti, è pur lecito chiedersi per qual motivo tornare ad occuparsi di una teoria fondata su una fisica in gran parte immaginaria e, per di più, smentita dai fatti, dopo la ponderosa analisi di Todhunter e Pearson⁴, le esaurienti rassegne di Müller e Timpe⁵ e di Burkhardt⁶, la lucida introduzione storica di Love⁷, la pregevole esposizione di Auerbach⁸, per citare solo i maggiori e più informati contributi; quale insomma la prospettiva, se non quella di un inevitabile *déjà-vu*, di un prevedibile *remake* con cent'anni di ritardo ?

¹ Truesdell C., “Rapport sur le pli cacheté n° 126, paquet présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 1^{er} octobre 1827, par M. Cauchy, et contenant le Mémoire: *Sur l'équilibre et le mouvement intérieur d'un corps solide considéré comme un système de molécules distinctes les unes des autres*”, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, vie académie*, **291**, II sem., 33-37, 1980. Il manoscritto è riprodotto in Truesdell C., “Cauchy's first attempt at molecular theory of elasticity”, *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, **1**, 133-143, 1981.

² Ci si riferisce, fra i vari lavori che sotto diverse prospettive hanno sviluppato l'argomento, ai notevoli saggi di Arnold D. H., “The Mécanique Physique of Siméon Denis Poisson: the evolution and isolation in France of his approach to physical theory (1800-1840)”, *Archive for history of exact sciences*, **28**, 243-307, 1983; **29**, 37-94; 287-307, 1983-84; Grattan-Guinness I., *Convulsions in French Mathematics, 1800-1840. From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics*, Basel, 1990; Dahan Dalmedico A., *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'École Française*, Paris, 1992.

³ Benvenuto E., “Radici e sviluppo della Meccanica dei Materiali e delle Strutture”, Relazione tenuta all'incontro AIMETA, Roma, 27 ottobre 1989, manoscritto.

⁴ Todhunter I., Pearson K., *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the present time*, **1**, Cambridge, 1886; **2**, Cambridge, 1893.

⁵ Müller C.H., Timpe A., “Die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie”, *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, **4**, IV, 1-51, 1907-1914.

⁶ Burkhardt H., “Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik”, IX Abschnitt, “Die Anfänge der Elasticitätstheorie und die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen”, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **10**, II, 526-671, Leipzig, 1908.

⁷ Love A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, **1**, Cambridge, 1892, pp. 9-23.

⁸ Auerbach F., “Elastizität im allgemeinen”, *Handbuch der Physik, herausgegeben von A. Winkelmann*, **1**, I, 497-544; “Elastizität der Kristalle”, *idem*, 670-709, Leipzig, 1908^{II}.

Eppure sarebbe difficile attribuire a quelle opere il merito di aver definitivamente sciolto i nodi connessi alla formulazione molecolare dell'elasticità, a meno di far proprio l'atteggiamento di Love secondo cui, quand'anche l'esperienza ne confermasse i risultati, «that would not amount to a proof of the molecular hypothesis. It would still open to us to reject that hypothesis as *not axiomatic*, and in the present state of science we must so reject it»⁹. Certo, così in realtà è stato: la possibilità di dedurre una teoria “matematica” dell'elasticità sulla base dei principi energetici, prescindendo da qualsiasi ipotesi sulla struttura della materia; la definizione del “costrutto” di tensione come ente dotato di vita propria, regolata soltanto dalle leggi astratte dell'analisi tensoriale; il progressivo realizzarsi del grandioso progetto di assiomatizzazione della meccanica, posto da Hilbert¹⁰ quale “problema” alle nuove generazioni del XX secolo, fanno ricordare quella prima gloriosa stagione come «merely a phase in the development of scientific thought»¹¹.

Questa però è soltanto una delle possibili letture, benché certo quella che meglio rispecchia gli attuali connotati della disciplina per come essi son venuti configurandosi dopo l'affermazione della *continuum mechanics* nell'accezione truesdelliana. Singolare coincidenza storica vuole infatti che, in quello stesso anno 1900 in cui Parigi accolse il Congresso Internazionale dei Matematici al cui cospetto Hilbert presentò i futuri “Mathematische Probleme”, avesse luogo, nella stessa città, un parallelo Congresso Internazionale di Fisica nel quale Voigt¹² si fece consapevole portavoce di un'opposto programma di ricerca, i cui contenuti costituiscono la vera eredità della *mécanique moléculaire* ottocentesca.

Senza voler riconoscere in tale fortuita coincidenza di tempo e di luogo altro che una circostanza attestante la definitiva “attribuzione di competenze” fra fisici e matematici che ha connotato lo sviluppo della scienza nel nostro secolo, non può farsi a meno di riconoscere che il titolo di quella eredità spetta ai primi piuttosto che ai secondi. Resta allora da chiedersi se, e per quali vie, l'impostazione molecolare è sopravvissuta nella moderna *fisica dello stato solido*, conservando l'ambizione di poter garantire una fondazione “per causas” dell'elasticità

⁹ Love A. E. H., op. cit., p. 19.

¹⁰ Hilbert D., “Mathematische Probleme”, *Archiv der Mathematik und Physik*, **1**, III Folge., 44-63; 213-237, 1901; anche in francese col titolo: “Sur les problèmes futurs des mathématiques”, *Compte rendu du deuxième Congrès International des Mathématiciens*, 59-114, Paris, 1902.

¹¹ Love A. E. H., op. cit., pp. 19-20.

¹² Voigt W., “Die gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Krystallelasticität”. Referat für den internationalen physikalischen Congreß in Paris vom 6. bis 12. August 1900, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 117-176, 1900; anche in francese col titolo: “L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux”, *Rapport présenté au Congrès international de Physique reuni à Paris en 1900*, 1-71, Paris, 1900.

dei solidi, allo stesso modo in cui l'alternativa impostazione continuista ha saputo offrirne una "rappresentazione matematica".

È certamente a tale ordine di problemi che intendeva alludere Love nella *Note B* aggiunta significativamente all'ultima edizione del suo celebre trattato¹³, laddove i requisiti indispensabili di una teoria molecolare vengono delineati nei seguenti quattro punti: 1) la definizione del concetto di tensione; 2) la deduzione di equazioni di legame rispettose della legge di Hooke; 3) l'esistenza di una funzione espressiva dell'energia di deformazione; 4) il superamento delle restrizioni sui coefficienti elastici espresse dalle cosiddette *relazioni di Cauchy*.

Intendimento di questo lavoro vuole essere una discussione storicamente vissuta degli aspetti qui stigmatizzati; dell'ultimo, in particolare, poiché attorno ad esso sembra giocarsi la possibilità stessa di un qualsiasi riconoscimento alla formulazione atomistica dell'elasticità. Sopravvissuto all'indomani della *querelle* che aveva animato il dibattito ottocentesco, il problema delle relazioni di Cauchy è infatti riemerso nel nostro secolo, ponendosi quale nodo ancora irrisolto dell'antico dilemma fra teoria del continuo e teoria molecolare.

13 Love A. E. H., op. cit., p. 617.

CAP. I. - LA DUPLICE FONDAZIONE DELLA TEORIA DELL'ELASTICITÀ

I. 1. Precedenti atomistici della meccanica dei solidi.

Chi sfogliasse con intimidita aspettativa il cospicuo volume dello *Handbuch der Physik* del 1933 dedicato allo “Aufbau der Materie” nella convinzione d'imbattersi nelle nuove straordinarie acquisizioni legate alla “scoperta” dell'atomo, si stupirebbe forse nel rintracciarvi il nome di un antico personaggio con a fianco un diagramma percorso da una linea piú volte serpeggiante attorno all'asse orizzontale, a questo tendente per i suoi valori crescenti e sfuggente verso l'alto con l'avvicinarsi a quello verticale.

In realtà, l'immagine con la quale i fisici moderni sono soliti rappresentare l'interazione fra le particelle ultime della materia non differisce poi molto da quella *lex virium* sulla quale Boscovich aveva redatto la sua *Theoria philosophiae naturalis* nel 1758. Ora come allora, una concezione che pretenda di spiegare la solidarietà della materia pensata di elementi disgiunti agenti fra loro a distanza, quand'anche quegli elementi siano supposti indivisibili e inestesi come nelle idee del gesuita dalmata, difficilmente potrebbe ammettere l'impenetrabilità, se non supponendo una repulsione crescente fra essi al diminuire della loro distanza, o dar conto della divisibilità, a meno di prevedere un progressivo indebolimento delle loro attrazioni con l'aumentare del mutuo intervallo.

Non è certo il caso di avviare qui un'analisi del “sistema” di Boscovich, discutendo le ragioni per le quali all'andamento sinuoso compreso fra i due limiti estremi si lascierebbe ricondurre una varia fenomenologia del comportamento materiale, elasticità compresa; è questa, peraltro, la parte argomentativa piú debole della *Theoria*, della quale si perde traccia anche in coloro che, nel corso del XIX secolo, riesumeranno in modo piú o meno esplicito il nome e le concezioni dell'autore ragusino.

È forse piú opportuno, invece, rammentare come l'ambiziosa *reductio ad unum* operata da Boscovich attraverso la sua legge delle forze abbia origini piú antiche, collocandosi al termine di un percorso secolare lungo il quale il pensiero atomistico aveva cercato di dar ragione della «resistenza dei solidi all'esser spezzati», in contrasto incessante con le opposte metafisiche cartesiane e leibniziana: dalla «repugnanza all'ammettere il vuoto» da parte di ogni minutissima particella, ricondotta da Galileo (1638) a grandezza misurabile dal peso di una verga d'acqua dell'altezza di diciotto braccia, alla riforma dell'atomismo antico concepita dal dimenticato D. Rossetti (1671) reinterpretando la stessa dottrina aristotelica dei luoghi naturali attraverso “leggi d'appetenza e d'abborrimento”, esprimenti in forma matematica le azioni a distanza che gli atomi esercitano fra loro entro le rispettive “sfere d'energia”; dal richiamo alle “elective attractions” fra le particelle primigenie della

materia, colle quali Newton (1717) aveva interpretato i fenomeni della capillarità e le reazioni chimiche trasponendo al microcosmo la sua grandiosa concezione dell'attrazione universale, alla loro definitiva traduzione in termini di “vis interna attrahens”, intesa da Musschenbroek (1729) quale legge di natura alla quale ricondurre la coesione della materia: è su queste premesse che trova sfondo la prodigiosa sintesi di Boscovich, non a caso ricordato da Saint-Venant come «le newtonien le plus conséquent».

Inutile addentrarsi su questa materia dopo che recenti ed esaustivi studi¹⁴ ne hanno colto il divenire alla luce delle tematiche proprie all'indagine sulla natura della resistenza dei solidi. Ineludibile però un riferimento ad essa, se si tien conto che l'indirizzo atomistico, seppur in gran parte sfrondata dalle implicazioni d'ordine metafisico, caratterizzerà l'impianto delle scienze razionali alla svolta del nuovo secolo, configurandosi, in quel singolare centro di ricerca che fu la Société d'Arcueil¹⁵, attorno al programma per una “Meccanica molecolare” avviato da Laplace e Berthollet con le teorie sull'azione capillare e sulle affinità chimiche, alle quali fecero seguito, nel campo a noi più vicino, le prime ricerche di Poisson sulle superficie elastiche.

I. 2. Un avvio contraddittorio.

Il volume del *Bulletin des sciences par la Société Philomatique de Paris* dell'anno 1823 costituisce un evento singolare nella nostra vicenda, di quelli che, alla luce dell'antitesi fra discreto e continuo segnalata fin dall'Introduzione, verrebbe spontaneo assumere quale termine *a quo* nella definizione dei connotati propri all'una e all'altra formulazione dell'elasticità dei solidi; in esso infatti sono contenuti, in forma di estratto, i fondamentali

¹⁴ Benvenuto E., *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*, Firenze, 1981; *An Introduction to the History of Structural Mechanics, I: Statics and Resistance of Solids*, New York-Berlin-Heidelberg, 1991, cap. 6; “Contributi italiani alla scienza delle costruzioni”, in *La cultura filosofica e scientifica, II: La storia delle scienze*, Busto Arsizio, 1989, pp. 875-938; Becchi A., *Radici storiche della teoria molecolare dell'elasticità, con particolare riguardo alla Theoria Philosophiae Naturalis di R. G. Boscovich*, tesi, Genova, 1988.

¹⁵ Crosland M., *The Society of Arcueil*, Cambridge, 1967; Fox R., “The Rise and Fall of Laplacian Physics”, *Historical studies in the physical sciences*, **4**, 81-136, 1976.

risultati ottenuti da Navier¹⁶ e Cauchy¹⁷ partendo dagli opposti modelli dell'«assemblage de molécules» e della «masse continue».

Una tale assunzione sarebbe però difficilmente sostenibile. Benché infatti sia indubbio che le “Recherches” di Cauchy costituiscano riferimento metodologico imprescindibile per la moderna meccanica del continuo, come ancora recentemente affermato da Truesdell¹⁸, l'esame dei testi e la stessa vicenda storica rivelano quanto ancora vi fosse da chiarire all'indomani di quella memorabile data. E ciò non tanto per «le caractères généraux de surabondance des travaux de ce grand analyste, et la multiplicité des points de vue sous lesquels il présente les matières qu'il traite»¹⁹, per riprendere un calzante giudizio di Saint-Venant allusivo alla duplice impostazione che lo stesso Cauchy diede allo studio dell'elasticità, quanto per il suo forzato tentativo di rapportare le due versioni, sembrando forse spontaneo che bastasse interpretare opportunamente le formule dell'una e dell'altra teoria per conseguire una perfetta identità di risultati pur partendo da “paradigmi” di pensiero tanto difforni.

In realtà, sia nella trattazione “in termini di spostamento” basata da Navier²⁰ sull'applicazione della procedura lagrangiana e sulla supposta convertibilità in integrali delle somme relative alle azioni esercitate su una molecola da quelle comprese nella sua sfera d'attività, sia in quelle di Poisson²¹ e dello stesso Cauchy²², passanti attraverso la definizione

16 Navier C.-L., “Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques”, *Bulletin des sciences par la Société Philomatique de Paris*, 177-181, Paris, 1823; estratto della memoria presentata all'Académie des Sciences il 14 maggio 1821 e pubblicata col titolo “Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques” in *Mémoires de l'Institut National*, 7, 375-393, 1827.

17 Cauchy A.-L., “Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques”, *Bulletin des sciences par la Société Philomatique de Paris*, 9-13, Paris 1823; comunicato all'Académie Royale des Sciences il 30 settembre 1822.

18 Truesdell C., “Cauchy and the modern mechanics of continua”, *Revue d'histoire des sciences*, 45, 5-24, 1992.

19 *Résumé des Leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines, par Navier, avec des Notes et des Appendices par M. Barré de Saint-Venant*, Paris, 1864^{III}, V Appendice, p. 651.

20 Navier C.-L., “Mémoire sur les lois de l'équilibre . . .”, pp. 384-390.

21 Poisson S.-D., “Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques”, *Annales de chimie et de physique*, 37, 337-355, avril 1828; estratto della memoria letta all'Académie des Sciences il 14 aprile 1828 e pubblicata con lo stesso titolo in *Mémoires de l'Académie Royale de Sciences de l'Institut*, 8, 353-570, 1829; “Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques et des fluides”, *Annales de chimie et de physique*, 42, 145-171, octobre 1829; estratto della memoria letta all'Académie des Sciences il 12 ottobre 1829 e pubblicata col titolo “Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides” in *Journal de l'École polytechnique*, 13, Cahier 20, 1-174, 1831.

22 Cauchy A.-L., “Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle”, *Exercices de Mathématiques*, 3, 188-212, 1828; “De la pression ou tension dans un système de points matériels”, *idem*, 213-236; “Sur les équations différentielles d'équilibre ou de

molecolarista di tensione, le equazioni ottenute contengono un'unica costante elastica nel caso d'isotropia, mentre nei lavori apparsi nel secondo e terzo volume degli *Exercices de Mathématiques* ad esplicitazione delle “Recherches”²³, il legame fra tensioni e deformazioni è espresso in generale da formule a due costanti elastiche. Tali formule sono stabilite per la prima volta nell'articolo “Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique” in base al principio che, per ogni punto del corpo di coordinate x_i ($i = 1, 2, 3$), ciascuna tensione principale si compone di due parti, «dont l'une serait proportionnelle à la dilatation ou condensation linéaire mesurée dans le sens de cette force, l'autre étant uniquement dépendante de la position du point»²⁴; inteso tale secondo contributo direttamente proporzionale alla dilatazione cubica $\Theta = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}$, si ha allora, nel riferimento principale,

$$(I.2.1) \quad \sigma_I = k \varepsilon_I + K\Theta \qquad \sigma_{II} = k \varepsilon_{II} + K\Theta \qquad \sigma_{III} = k \varepsilon_{III} + K\Theta$$

e, in un riferimento cartesiano generico,

$$(I.2.2a) \quad \sigma_{11} = k \varepsilon_{11} + K\Theta \qquad \sigma_{22} = k \varepsilon_{22} + K\Theta \qquad \sigma_{33} = k \varepsilon_{33} + K\Theta$$

$$(I.2.2b) \quad \sigma_{23} = k \varepsilon_{23} \qquad \sigma_{31} = k \varepsilon_{31} \qquad \sigma_{12} = k \varepsilon_{12}$$

ove Cauchy introduce l'espressione linearizzata delle deformazioni $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, con u_i componenti dello spostamento del punto ($i, j = 1, 2, 3$).

Le formule (I.2.2 a-b) sono dedotte anche nella successiva memoria “Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues” particolarizzando le relazioni generali ottenute dall'estensione del principio precedente «au cas où l'élasticité

mouvements pour un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle”, *idem*, 4, 129-139, 1829.

²³ Il contenuto delle “Recherches” è esplicitato nei lavori “De la pression ou tension dans un corps solide”, *Exercices de Mathématiques*, 2, 42-56, 1827; segue una “Addition à l'article précédent” (pp. 57-59); “Sur la condensation et la dilatation des corps solides”, *idem*, 60-69; “Sur les relations qui existent, dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices”, *idem*, 108-111; “Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique”, *idem*, 3, 160-187, 1828.

²⁴ Cauchy A.-L., “Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ...”, p. 177. Occorre precisare che, inizialmente, Cauchy introduce le equazioni di legame isotropo tramite le formule uni-costanti (p. 171) $\sigma_{11} = k \varepsilon_{11}$ (e analoghe) $\sigma_{23} = k \varepsilon_{23}$ (e analoghe), successivamente abbandonate (pp. 177-178) a favore delle formule bi-costanti $\sigma_{11} = k \varepsilon_{11} + K(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$ (e analoghe) $\sigma_{23} = k \varepsilon_{23}$ (e analoghe) alle quali egli farà sempre riferimento per la sua teoria continuista.

varie dans le passage d'une direction à l'autre» ed ammettendo «que le pressions s'évanouissent dans l'état naturel»²⁵, e cioè

$$(I.2.3) \quad \sigma_{ij} = c_{ijhk} \varepsilon_{hk} \quad (i, j, h, k = 1, 2, 3) .$$

ove a secondo membro è sottintesa la somma sugli indici ripetuti.

Ora, è veramente singolare che Cauchy, pur ravvisando nelle formule (I.2.3) la presenza di 36 distinti coefficienti c_{ijhk} dipendenti «de la nature des corps» e riconoscendo perfettamente il diverso significato fisico delle sei costanti σ_j^0 esprimenti l'eventuale stato di tensione iniziale²⁶, abbia contestualmente spinto il raffronto con le corrispondenti formule dell'elasticità molecolare fino ad imporre la forzata identità²⁷.

Quanto fosse necessario un chiarimento sulla diversa natura dei coefficienti presenti nel duplice repertorio di equazioni fornito da Cauchy, ne è prova palese la fallace interpretazione che, a vent'anni di distanza dalla pubblicazione di questi lavori, avrebbe condotto Wertheim²⁸ a suggerire un'improbabile versione unicostante dell'isotropia rispondente ai suoi risultati di laboratorio. Quel chiarimento, emerso proprio in relazione alle contestabili deduzioni teoriche dello sperimentatore austro-francese, doveva essere fornito incidentalmente da Clausius²⁹ in un lavoro che si rivelerà di ben più ampia portata ai nostri fini, laddove la discussione si incentra su un aspetto essenziale del problema: la definizione di tensione in un sistema di particelle soggette alle mutue attrazioni e repulsioni. È soltanto analizzando l'intreccio dei punti di vista connessi alla definizione di tale concetto che si può pretendere di far luce sul difficile avvio della teoria dell'elasticità.

²⁵ Cauchy A.-L., "Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues", *Exercices de Mathématiques*, **4**, 293-319, 1829; pp. 295-296.

²⁶ Cauchy A.-L., *ibidem*, pp. 298-305. È in queste pagine che Cauchy introduce per la prima volta nell'ambito della sua teoria continuista la considerazione di un eventuale stato di autotensione σ_j^0 precedente la deformazione del corpo. In questo caso, le equazioni contengono in generale 42 coefficienti distinti (le 6 componenti σ_{ij}^0 e le 36 costanti elastiche indicate nella tabella (65) a p. 309).

²⁷ Ripromettendoci di esaminare questo aspetto nei successivi paragrafi, occorre precisare che nella citata memoria "Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues" Cauchy riconosce chiaramente la distinzione fra le formule della teoria continuista e quelle della teoria molecolare, rimarcando che per quest'ultima «les quarante-deux coefficients (...) se réduisent alors à vingt-un» (p. 304). Questa osservazione sembra correggere le affrettate conclusioni tratte nei due lavori molecolaristi del 1828 dalle quali ha preso origine un generale fraintendimento dell'effettiva compatibilità delle due formulazioni ravvisabile, ancora recentemente, in alcuni scritti di I.Szabó condensati nella sua *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Basel, 1987^{III}, pp. 398-400.

²⁸ Wertheim G., "Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes", *Annales de chimie et de physique*, III sér., **23**, 52-95, mai 1848.

²⁹ Clausius R., "Ueber die Veränderungen, welche in den bisher gebräulichen Formeln für das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer fester Körper durch neuere Beobachtungen nothwendig geworden sind", *Annalen der Physik und Chemie*, **76**, 46-67, 1849.

I. 3. La definizione di tensione.

Senza voler cogliere nella ravvisata «multiplicité des points de vue» con la quale Cauchy ha trattato i problemi della fisica matematica alcun elemento contraddittorio, in effetti irrintracciabile al di là delle svianti forzature suaccennate, è davvero sorprendente che propriamente a lui siano da attribuire, per generalità e chiarezza, gli atti fondativi sui quali è stato formulato lo studio dei solidi elastici nella loro doppia accezione di sistemi continui e discreti. Non potendo negare a Navier la precedenza storica per la quale il suo nome è ormai indissolubilmente legato alle equazioni d'elasticità in termini di spostamento, è pur vero infatti che una coerente definizione di tensione, tanto come ente astratto generalizzante la nozione intuitiva di pressione idrostatica, nel modo inteso da Eulero, quanto come effetto risultante dell'interazione a distanza tra le particelle materiali, secondo un'idea sviluppata anche da Poisson, è rintracciabile soltanto nei lavori di Cauchy.

Non è certo il caso di sottolineare, dopo le esplicite parole di Truesdell³⁰, il ruolo che la prima di quelle definizioni gioca nell'odierna teoria generale dello *stress*, se non per rimarcare il carattere “impredicativo” che il concetto di tensione ha acquisito nello schema concettuale della meccanica del continuo. È nostro scopo infatti, soffermarci sulla seconda definizione, poiché si ha ragione di ritenere che il nocciolo teorico della disputa fra l'impostazione molecolare e quella continuista, troppo facilmente risolta da Pearson nella sterile contrapposizione fra «rari-costant» e «multi-costant theory»³¹, vada piuttosto ricercato nel concetto stesso di forza (o di tensione), e cioè nell'alternativa tra due posizioni di pensiero: quella ormai entrata a far parte integrante della meccanica del continuo e della sua assiomatizzazione matematica, secondo la quale «forces and torques, like bodies, motion, and masses, are primitive elements of mechanics»³²; e quella proveniente dal vecchio programma di Carnot, convintamente difeso da Saint-Venant nel corso della vicenda che ci accingiamo a ripercorrere, secondo il quale il titolo di “elemento primitivo” della meccanica spetta solo ai concetti della cinematica (corpi e moti), mentre le grandezze statiche debbono essere riguardate come concetti derivati. Veniamo dunque ad affrontare il delicato argomento.

30 Truesdell C., “The Creation and Unfolding of the Concept of Stress”, *Essays in the History of Mechanics*, 184-238, Berlin-Heidelberg-New York, 1968. Su questo aspetto si veda anche Dahan Dalmedico A., “La notion de pression: de la métaphysique aux diverses mathématisations. Causalité et statut des hypothèses”, *Revue d'histoire des sciences*, **42**, 79-108, 1989.

31 Todhunter I., Pearson K., op. cit., **1**, pp. 496-505.

32 Truesdell C., *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, New York-San Francisco-London, 1977, p. 119.

Per definire la tensione σ_1 su un piano π di normale x_1 nel punto M di coordinate x_i ($i = 1, 2, 3$), Cauchy³³ immagina, dal lato delle x_1 negative, un cilindro retto avente base elementare s , centro in M e altezza h pari al raggio d'attività molecolare, con h supposto piccolissimo rispetto alle dimensioni di s (fig.I.3.1).

Indicata con $M m f(r)$ la forza attrattiva o repulsiva agente secondo la congiungente delle molecole M, m , proporzionale alle loro masse (indicate ancora con M, m) e funzione della loro distanza r , Cauchy afferma che il prodotto $\sigma_1 s$ è esprimibile come risultante delle azioni esercitate dalle molecole m' dal lato delle x_1 positive su quelle m'' comprese nel piano π e all'interno del cilindro di volume $s h$: in particolare, le proiezioni della risultante delle azioni esercitate sulla sola molecola M saranno equivalenti alle somme

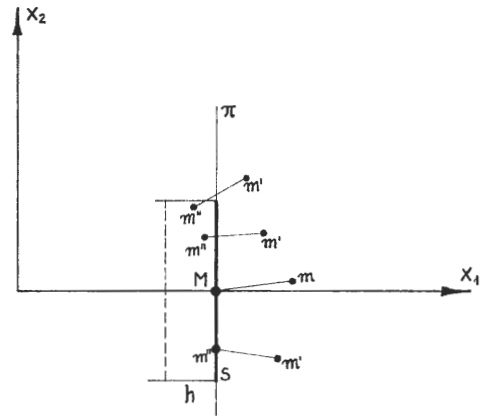


fig. I.3.1

$$(I.3.1a) \quad \sum M m n_1 f(r) \quad \sum M m n_2 f(r) \quad \sum M m n_3 f(r)$$

ovvero ai prodotti

$$(I.3.1b) \quad M \sum m n_1 f(r) \quad M \sum m n_2 f(r) \quad M \sum m n_3 f(r)$$

ove le somme \sum si intendono estese alle molecole dal lato delle x_1 positive le cui congiungenti con M sono individuate dai coseni direttori n_1, n_2, n_3 . Ammettendo che le molecole abbiano masse uguali e siano distribuite attorno a M come attorno ad ogni altra molecola ed osservando che ciascuna delle precedenti somme contiene un certo numero di termini relativi a molecole per le quali si ha $r n_1 = h$, con r distanza tra m e M , Cauchy conclude che i prodotti $\sigma_{11} s, \sigma_{12} s, \sigma_{13} s$ delle componenti $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ di σ_1 per l'area elementare s devono contenere tali termini ciascuno ripetuto tante volte quante sono le molecole del cilindro con distanza dal piano π uguale od inferiore all'altezza h ; tali prodotti si ottengono quindi moltiplicando le quantità sotto il segno di somma per il numero n di molecole contenute nel cilindro di altezza h , cioè

$$(I.3.2) \quad \sigma_{11} s = M \sum n m n_1 f(r) \quad \sigma_{12} s = M \sum n m n_2 f(r) \quad \sigma_{13} s = M \sum n m n_3 f(r)$$

33 Cauchy A.-L., "De la pression ou tension dans un système de points matériels", pp. 213-218.

Esprimendo n attraverso la densità ρ (definita dal rapporto fra la massa totale delle molecole del cilindro ed il suo volume) si ha

$$n = \frac{s h \rho}{M} = \frac{s r n_1 \rho}{M}$$

e le componenti prendono allora la forma

$$(I.3.3) \quad \sigma_{11} = \rho \mathbf{S} m n_1^2 f(r) \quad \sigma_{12} = \rho \mathbf{S} m n_1 n_2 f(r) \quad \sigma_{13} = \rho \mathbf{S} m n_1 n_3 f(r)$$

Ora, poiché un analogo ragionamento porta a definire, nel medesimo punto M , il prodotto $-\sigma_1 s$, come risultante delle azioni delle molecole dalla parte delle x_1 negative su quelle comprese nel piano π e all'interno del cilindro di volume sh immaginato dalla parte delle x_1 positive, Cauchy esprime le componenti di σ_1 estendendo le somme \mathbf{S} a tutte le molecole situate da ambo i lati del piano π con l'avvertenza di introdurre il fattore $1/2$ nelle formule precedenti. Si trova pertanto, per le componenti della tensione nel punto M operanti sul piano di normale x_1

$$(I.3.4) \quad \sigma_{11} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m r n_1^2 f(r) \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m r n_1 n_2 f(r) \quad \sigma_{13} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m r n_1 n_3 f(r)$$

e analogamente, per quelle sul piano di normale x_2

$$(I.3.5) \quad \sigma_{21} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m r n_1 n_2 f(r) \quad \sigma_{22} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m r n_2^2 f(r) \quad \sigma_{23} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} [m r n_2 n_3 f(r)]$$

e di normale x_3

$$(I.3.6) \quad \sigma_{31} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m r n_1 n_3 f(r) \quad \sigma_{32} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m r n_2 n_3 f(r) \quad \sigma_{33} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m r n_3^2 f(r) .$$

Il ruolo di queste formule è veramente fondamentale. Esse infatti non solo conducono alle stesse equazioni d'equilibrio della versione continuista permettendo di riconoscere immediatamente l'uguaglianza delle componenti tangenziali, ma consentono, come presto vedremo, di dedurre d'un sol colpo, attraverso la descrizione geometrica della deformazione, la struttura propria delle equazioni costitutive nelle quali il legame fra tensioni e deformazioni risulta espresso, nel caso generale, da soli 15 distinti coefficienti elastici e, nel caso isotropo, da un unico coefficiente.

Per la verità, la precedente deduzione delle equazioni (I.3.4-6) non è del tutto esente da critiche e lo stesso Cauchy doveva esserne consapevole se, tornando successivamente sull'argomento, sentì il bisogno di precisare l'uguaglianza $\sigma(x_i, \mathbf{n}) = -\sigma(x_i, -\mathbf{n})$, riconoscendola garantita dalla condizione che «*le rayon de la sphère d'activité sensible d'une*

*molécule soit effectivement une quantité très-petit, relativement aux dimensions qu'il sera possible d'attribuer aux bases du prisme sans faire varier sensiblement la pression soit intérieure, soit extérieure»*³⁴. In effetti, considerando le azioni che le molecole dal lato delle x_1 positive esercitano su quelle contenute all'interno del cilindro, la definizione di Cauchy tiene conto anche di coppie molecolari la cui congiungente non attraversa la superficie elementare s . Questa circostanza, della quale neanche Poisson³⁵ ha rilevato le conseguenze, sembra esser stata per la prima volta avvertita da Duhamel, il quale, come ricorda Saint-Venant³⁶, suggerì, in una memoria presentata nel 1828 ma non pubblicata, una definizione di tensione in analogia a quella data da Fourier per il flusso di calore. Questa formulazione, alla quale lo stesso Duhamel dovette attribuire scarsa importanza rifacendosi, nei successivi lavori sulla termo-elasticità³⁷, a quella proposta da Cauchy, venne ripresa dallo stesso Saint-Venant³⁸ perché più rigorosa ed esente da incongruenze.

Se infatti il riferimento alla tensione deve poter sempre garantire la sua sostituzione alle azioni individuali delle molecole, è facile rendersi conto che la definizione di Cauchy non soddisfa pienamente questa esigenza. «Supposons d'abord», osserva Saint-Venant, «que la surface de séparation des deux portions de corps se compose de deux plans indéfinis OA, OB, formant un angle droit AOB; soient Oa, Ob les prolongements de ces plans à traverse la première portion AbaB que se compose, comme l'on voit, de trois onglets AOb, bOa, aOB (...), tandis que la seconde portion ne comprend qu'un seul onglet AOB»³⁹ (fig I.3.2).

³⁴ Cauchy A.-L., “Notes sur les pressions supportées, dans un corps solide ou fluide, par deux portions de surface très-voisines, l'une extérieure, l'autre intérieure à ce même corps”, *Comptes rendus*, **16**, I sem., 151-155, 1843.

³⁵ La definizione di tensione data da Poisson non si discosta sostanzialmente da quella offerta da Cauchy, benché in essa compaia l'intervallo molecolare medio α per esprimere la densità del corpo.

³⁶ Barré de Saint-Venant A. J. C., “Sur la définition de la pression dans les corps fluides ou solides en repos ou en mouvement”, *L'Institut*, n° 524, 12-13, 1844; letto alla Société Philomatique de Paris nella seduta del 30 dicembre 1843 ed apparso tra i suoi estratti del 1843 alle pp.134-138. Lo stesso Duhamel ha definito l'espressione del flusso di calore attraverso un elemento di superficie piana come «la quantité de chaleur qui passe d'un côté, moins celle qui passe de l'autre; cette différence changera de signe sans changer de grandeur, quand on considérera successivement les deux côtés du plan de l'élément» in “Mémoire sur les équations générales de la propagation de la chaleur dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens”, *Journal de l'École polytechnique*, **13**, Cahier 21, 356-399, 1832, p. 361; presentato all'Académie des Sciences il 7 aprile 1828.

³⁷ Duhamel J. M. C., “Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides”, *Mémoires présentés par divers savans à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, **5**, 440-498, 1838.

³⁸ Barré de Saint-Venant A. J. C., op. cit.; in questa breve nota Saint-Venant ricorda di aver proposto di adottare la similitudine col flusso di calore già in una memoria del 1834 e di aver per la prima volta fornito la sua nuova definizione nel *Cours lithographié* redatto nel 1837 in occasione della sostituzione di Coriolis alla cattedra di Meccanica applicata presso l'École des ponts et chaussées.

³⁹ *Ibidem*, p. 12.

Ora, in base alla definizione fornita da Cauchy, «la *pression* de la première portion de corps $AbaB$ sur la seconde AOB , à travers le plan AO , ne sera autre chose que l'action totale des ongles AOb , bOa sur AOB , et la pression à travers le seconde plan BO sera l'action totale des ongles bOa , aOB sur AOB . Donc la résultante des pressions de la première portion sur la seconde se compose de *deux fois l'action de l'onglet* bOa , et une fois l'action de chacun des deux autres ongles AOb , aOB , sur la seconde portion de corps AOB .

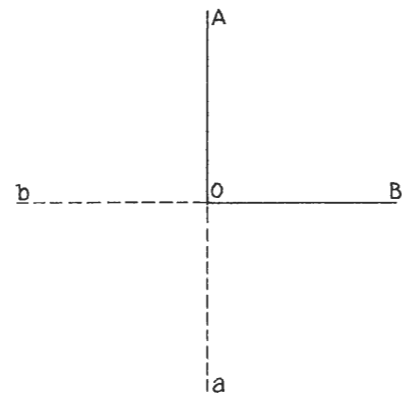


fig. I.3.2

Si l'on considère réciproquement les pressions de la seconde portion AOB sur la première $AbaB$, on verra facilement que leur résultante se composera des actions de AOB sur les deux ongles AOb , aOB , *mais nullement sur l'onglet intermédiaire* bOa qui, avec ceux-ci, forme la première portion de corps. Donc, d'après la définition ci-dessus de la pression, la résultante des pressions à travers la surface de séparation des deux portions que nous venons de considérer *n'est point égale à la résultante de leur actions moléculaires*: même, la résultante des pressions de la première portion sur la seconde *n'est point égale et opposée* à la résultante des pressions de la seconde sur la première. On voit, en effet, qu'il y a *double emploi* dans la première des deux résultantes, et *omission* dans la seconde, des actions fournies par les molécules de l'angle bOa »⁴⁰.

Tali incongruenze si manifestano con maggior evidenza quando si intenda valutare le pressioni sulle facce di un parallelepipedo rettangolo esercitate dalla restante parte del corpo. Questa circostanza, ricorrente ogni volta che si esprime l'equilibrio di un elemento di volume, mostra che soltanto le azioni dei sei prismi elevati sulle facce del parallelepipedo vengono contate una volta; quelle dei dodici spicchi diedri costruiti sui suoi spigoli entrano invece due volte e quelle relative agli otto angoli triedri eretti sui suoi vertici compaiono addirittura tre volte. Al contrario, conclude Saint-Venant, gli inconvenienti prima ravvisati vengono meno se si definisce la tensione su una piccola faccia qualunque, all'interno di un corpo o alla superficie di separazione tra due corpi, come la «*résultante de toutes les actions attractives ou répulsives que exercent les molécules situées d'un côté de cette face sur les molécules situées de l'autre côté, et dont les directions traversent cette face*»⁴¹.

40 Ibidem, p. 12.

41 Ibidem, p. 12.

Le precisazioni di Saint-Venant, non implicanti peraltro alcuna sostanziale revisione delle formule di Cauchy, furono da quest'ultimo⁴² accolte con l'aggiunta di un prezioso chiarimento qualificante, in ambito molecolare, la connotazione usuale in meccanica dei continui per i cosiddetti “corpi di Cauchy”. La nuova definizione infatti, benché «plus rigoureuse», sembra lasciare ancora sussistere un dubbio, poiché «[o]n est tenté de se demander si les forces diverses que l'on compose entre elles pour obtenir la pression, et que l'on peut regarder comme appliquées aux points où elles rencontrent la surface de l'élément supposé rigide, ont effectivement une résultante unique»⁴³. Cauchy nota infatti che, «en toute rigueur», si dovrebbe sostituire quelle azioni con una forza ed una coppia; «mais, comme l'a encore observé M. de Saint-Venant, on peut faire abstraction du couple, quand l'élément de surface est très-petite»⁴⁴. In effetti, se ogni dimensione di tale elemento è un infinitesimo del primo ordine, la risultante delle azioni, sensibilmente proporzionale alla sua superficie, è un infinitesimo del secondo ordine. Il momento della coppia è invece un infinitesimo del quarto ordine, poiché la sua intensità dipende dalle piccolissime variazioni subite dalle azioni molecolari nell'estensione dell'elemento e dalla distanza che separa i punti d'applicazione delle forze costituenti la coppia: «Il ne résulte que le couple disparaît toujours dans la valeur générale de ce qu'on doit appeler la pression supportée par une surface en un point donnée. D'ailleurs, cette valeur générale est précisément celle que j'avais obtenue dans le tome III de mes *Exercices de Mathématiques*»⁴⁵.

Alle medesime espressioni (I.3.4-6) di Cauchy, o meglio, ad un'unica «formule fondamentale, dont on tire (...) toutes celles de la mécanique moléculaire», pervenne lo stesso Saint-Venant⁴⁶ attraverso una brillante dimostrazione basata sulla sua nuova definizione. Per determinare la risultante delle azioni $m'm''f(r)$ scambiate da tutte le coppie di molecole m' , m'' , distanti r , la cui congiungente attraversa una piccola faccia s di normale x_i e centro M , Saint-Venant suggerisce di sommare insieme tutte le azioni tra i punti m' , m'' le cui congiungenti hanno la stessa direzione e la stessa grandezza r . Le molecole m' , a sinistra di s , capaci di esercitare sulle molecole m'' , a destra, delle azioni sensibili a distanze uguali e parallele a r , risultano allora contenute in un cilindro finito, obliquo rispetto alla base ed

⁴² Cauchy A.-L., “Notes relatives à la mécanique rationnelle”, *Comptes rendus*, **20**, I sem., 1760-1766, 1845.

⁴³ Ibidem, p. 1765.

⁴⁴ Ibidem, p. 1765.

⁴⁵ Ibidem, p. 1765.

⁴⁶ Barré de Saint-Venant A. J. C., “Note sur la pression dans l'intérieur des corps ou à leurs surfaces de séparation”, *Comptes rendus*, **21**, II sem., 24-26, 1845.

elevato alla sua sinistra, le cui generatrici sono uguali e parallele a r . La massa totale delle molecole all'interno del cilindro sarà allora $\rho s r n_i$, ove ρ è la densità del corpo (fig. I.3.3).

Se quindi si moltiplica l'espressione precedente per la massa m'' di una molecola a destra e per la funzione delle forze $f(r)$, si ottiene la somma di tutte le azioni scambiate attraverso s e parallelamente a r da tutte le coppie molecolari distanti r , ossia $\rho s m'' r f(r) n_i$; volendone la proiezione in direzione Mx_j basta moltiplicare per il coseno n_j , per cui si ha $\rho s m'' r f(r) n_i n_j$. A questo punto, per ottenere il prodotto $s \sigma_{ij}$ si tratta di sommare quest'ultima espressione per tutti i valori e le direzioni di r ; si trova pertanto

$$(I.3.7) \quad \sigma_{ij} = \rho \sum m'' r f(r) n_i n_j ,$$

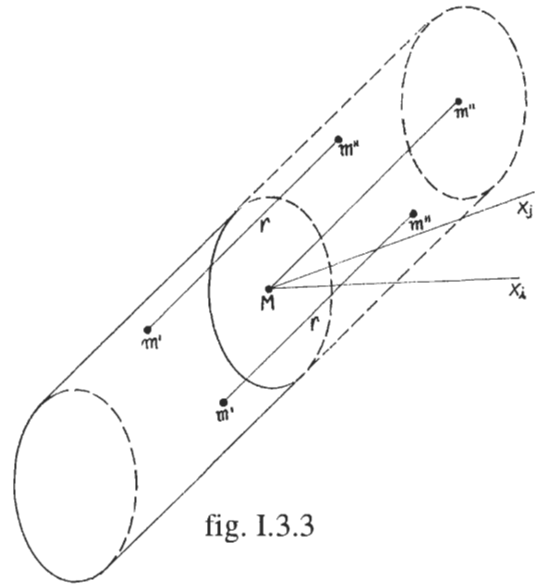


fig. I.3.3

formula che esprime le (I.3.3) di Cauchy; per ricondursi alle corrispondenti (I.3.4-6), Saint-Venant osserva che si può introdurre il fattore 1/2 nella (I.3.7) qualora si estenda la somma a tutte le molecole contenute nella sfera d'attività di M e distanti r da essa, da cui

$$(I.3.8) \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \rho \sum m'' r f(r) n_i n_j ,$$

«expression dont on déduit toutes les formules connues, en prenant successivement la ligne arbitraire $[x_j]$ dans diverses directions par rapport à la normale $[x_i]$, et en substituant les valeurs de ρ , r , (r, x) , (r, y) [rispettivamente n_i e n_j] relatives, soit à l'état primitif d'un corps, soit à l'état où il se trouve après un dérangement quelconque de ses parties»⁴⁷.

La *reductio ad unum* compendiata dalla (I.3.8) risponde anche al caso di corpi composti di molecole di specie diverse e permette di determinare le tensioni che hanno luogo alla superficie di separazione di due corpi, qualunque sia il rapporto tra il più piccolo intervallo molecolare e il raggio d'attività delle azioni attrattive e repulsive, a patto che tale raggio sia molto superiore al suddetto intervallo. Le precisazioni relative a questi casi furono indicate dallo stesso Saint-Venant nelle annotazioni apposte alla terza edizione del *Résumé des Leçons* di Navier⁴⁸ facendo riferimento ad una densità e ad una azione molecolare medie.

⁴⁷ Ibidem, p. 26.

⁴⁸ *Résumé des Leçons (...) par Navier, avec des Notes et des Appendices par M. Barré de Saint-Venant*, Paris, 1864^{III}, III Appendice, pp. 567-568.

Nello stesso volume dei *Comptes rendus* in cui Saint-Venant era pervenuto alla «formule fondamentale», un nuovo contributo di Cauchy⁴⁹ sembra voler confermare la fondatezza delle deduzioni teoriche tratte dal modello molecolare ed il loro accordo con quelle del parallelo modello continuista. L'intento dimostrativo dell'autore è di ritrovare quella formula, o le sue conseguenze in termini di componenti, come espressioni approssimate «des valeurs dont l'exactitude serait rigoureuse s'il était permis de considérer le corps solide ou fluide comme une masse continue»⁵⁰.

In questo caso la somma \mathbf{S} dei prodotti $m' m'' f(r)$ esprimenti la risultante delle azioni che «les masses élémentaires» m' (si badi, non più le molecole) esercitano sulle m'' attraverso la superficie s normale all'asse x_1 e con centro $M(x_1, x_2, x_3)$, può scriversi sotto forma d'integrale sestuplo

$$(I.3.9) \quad \sigma_{11} = \iiint \iiint \rho' \rho'' f(r) n_1 dx_1' dx_2' dx_3' dx_1'' dx_2'' dx_3''$$

ove ρ' e ρ'' sono le densità nei volumi elementari v' e v'' .

Le variabili x_1'', x_2'', x_3'' e x_1', x_2', x_3' rappresentano le proiezioni sugli assi di due punti Q e P di coordinate $(x_1 - x_1'', x_2 - x_2'', x_3 - x_3'')$ e $(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3')$ compresi nei volumi v'' e v' e distanti r tra loro (fig.I.3.4). Per trasformare l'integrale sestuplo in triplo, Cauchy considera un punto R distante r da M sulla parallela a QP , le cui coordinate $(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3')$ si ottengono da quelle di P e Q avendosi $x_1 = x_1' + x_1'', x_2 = x_2' + x_2'', x_3 = x_3' + x_3''$.

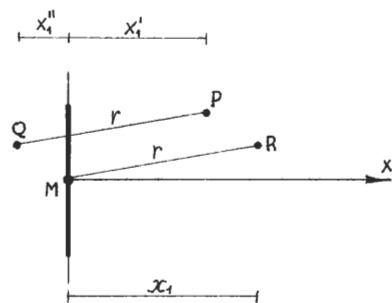


fig.I.3.4

Sostituendo queste nuove variabili al posto delle x_1', x_2', x_3' , integrando rispetto alle variabili x_2'' e x_3'' entro limiti tali per cui la retta QP resti compresa nel cilindro di base s con generatrici parallele a OR (ciò che dà $\iint dx_2'' dx_3'' = s$, e $\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{x_3} = \theta$ con $0 \leq \theta \leq 1$) ed assumendo per le altre variabili i limiti d'integrazione $0 \leq x_1 \leq \infty, -\infty \leq x_2 \leq \infty, -\infty \leq x_3 \leq \infty, 0 \leq x_1' \leq x_1$, si trova in definitiva

$$(I.3.10) \quad \sigma_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \int_0^{\infty} \omega x_1 f(r) n_1 dx_1$$

ove Cauchy pone $\omega x_1 = \int_0^{x_1} \rho' \rho'' dx_1'$

49 Cauchy A.-L., "Observations sur la pression que supporte un élément de surface plane dans un corps solide ou fluide", *Comptes rendus*, 21, II sem., 125-133, 1845.

50 Ibidem, p. 126.

ovvero

$$(I.3.11) \quad \omega = \int_0^1 \rho' \rho'' d\theta$$

Ricordando che $n_1 = \frac{x_1}{r}$ ed estendendo l'integrazione per $-\infty \leq x_1 \leq \infty$, si trova, introducendo il fattore 1/2,

$$(I.3.12) \quad \sigma_{11} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \int_0^{\infty} \omega x_1^2 \frac{f(r)}{r} dx_1 .$$

Cauchy osserva inoltre che, se si decompone lo spazio in volumi elementari di cui uno qualunque v contiene il punto R , la (I.3.11) può scriversi, «sans erreur sensible», sotto forma di somma

$$(I.3.13) \quad \sigma_{11} = \frac{1}{2} \mathbf{S} \left[\omega x_1^2 \frac{f(r)}{r} v \right]$$

estesa a tutti i volumi elementari v che contengono punti per i quali ω non si annulla.

A questo punto la conclusione è ad un passo: «[a]doptons maintenant l'hypothèse généralement admise, savoir, que les actions moléculaires décroissent très-rapidement quand les molécules s'éloignent les unes des autres, et supposons ce décroissement assez rapide pour que (...) on puisse, sans erreur sensible, réduire $f(r)$ à zéro quand r cesse d'être très-petit. Alors, les limites inférieures et supérieures des variables $[x_1, x_2, x_3]$ (...) pourront être réduites à des quantités négatives et positives, très-rapprochées de zéro. Par suite, pour des valeurs de θ comprises entre zéro et l'unité, les valeurs de ρ' , ρ'' (...) différencieront très-peu de la valeur de ρ [la densità nel punto O], et la formule [(I.3.12)] donnera sensiblement

$$\omega = \rho^2.$$

Il y a plus: si l'on nomme m la masse comprise sous le volume v , on aura encore, à très peu près,

$$m = \rho^2 v, \quad \rho m = \rho^2 v = \omega v;$$

et, par suite,

$$(I.3.14) \quad \sigma_{11} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} \left[m x_1^2 \frac{f(r)}{r} \right] \gg^{51},$$

formula che coincide esattamente con la prima delle (I.3.4) o deriva dalla formula (I.3.8) di Saint-Venant qualora si ricordi che $n_1 = \frac{x_1}{r}$.

51 Ibidem, p. 133.

I. 4. Il problema della conversione delle somme in integrali.

La precedente trattazione sembra suggerire a tutta prima, semplicemente percorrendo a ritroso il ragionamento sopra riportato, la possibilità di convertire le sommatorie relative alle azioni tra coppie molecolari in integrali estesi alla sfera d'attività di una molecola, ammesso che ogni volume infinitesimo in cui essa può pensarsi suddivisa contenga ancora un gran numero di particelle.

In realtà si cela in questo passaggio un aspetto estremamente delicato, più volte emerso nel corso del dibattito ottocentesco, la cui portata va ben oltre la discussione sul numero e la forma delle costanti per coinvolgere, invece, la pressante questione sulla natura continua o discreta della materia, implicando persino la messa in dubbio degli strumenti allora dominanti nello studio dei problemi della fisica matematica.

Si è fatto cenno in precedenza alla via “lagrangiana” seguita da Navier per dedurre le equazioni d'equilibrio e difficilmente si sarebbe potuto pensare ad un qualche suo vizio intrinseco, dopo i confortanti risultati che la sua applicazione aveva raggiunto nella meccanica molecolare di Laplace. Nondimeno, all'indomani della pubblicazione di quelle equazioni, il discepolo più giovane e ribelle cresciuto alla scuola d'Arcueil, Simeon Denis Poisson, doveva infliggere alle convinzioni del maestro una scossa del tutto inattesa. Non è certo il caso di ripercorrere l'attività scientifica dell'eminente studioso francese dopo la lucida analisi presentata in un recente saggio da Arnold⁵²; è però essenziale, ai nostri fini, seguire le ragioni che lo hanno progressivamente portato a rigettare i metodi astratti della meccanica analitica di stampo lagrangiano, in nome di un ambizioso quanto suggestivo *programma di ricerca* basato esclusivamente sulla considerazione delle azioni molecolari, il cui “manifesto” è enunciato nell'introduzione al suo primo grande “Mémoire” sull'elasticità: «(...) il serait à désirer que les géomètres reprissent sous ce point de vue physique et conforme à la nature les principales questions de mécanique. Il fallu les traiter d'une manière tout-à-fait abstraite, pour découvrir les lois générales de l'équilibre et du mouvement; en ce genre de généralité et d'abstraction, Lagrange est allé aussi loin qu'on puisse le concevoir, lorsqu'il a remplacé les liens physiques des corps par des équations entre les coordonnées de leurs points: c'est là qui constitue la *Mécanique analytique*; mais à côté de cette admirable conception, on pourrait maintenant élever la *Mécanique physique*, dont le principe unique serait de ramener tout aux actions moléculaires, qui transmettent d'un point à un autre l'action des forces données, et son intermédiaire de leur équilibre. De cette manière, on n'aurait plus

⁵² Arnold D. H., “The *Mécanique Physique* of Siméon Denis Poisson: the evolution and isolation in France of his approach to physical theory (1800-1840)”, *Archive for history of exact sciences*, **28**, 243-367, 1983; **29**, 37-94; 287-307, 1983-84.

d'hypothèses spéciales à faire lorsqu'on voudra appliquer les règles générales de la mécanique à des questions particulières»⁵³.

53 Poisson S.-D., "Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques", *Mémoires de l'Académie Royale de Sciences de l'Institut*, **8**, 353-570, 1829. All'organizzazione sistematica di questo programma avrebbe dovuto provvedere un progettato, ma incompiuto, *Traité de physique mathématique*; di esso Poisson dà per la prima volta notizia nell'*Avvertissement* alla seconda edizione del suo *Traité de mécanique* del 1833; le parti ritenute compiute prima della morte (1839) sono la "Nouvelle théorie de l'action capillaire" già pubblicata nel 1831, la "Théorie mathématique de la chaleur" apparsa apparsa nel 1835, e il "Mémoire sur les températures de la partie solide du globe, de l'atmosphère, et du lieu de l'espace où la terre se trouve actuellement" del 1837.

È qui il caso di ricordare i connotati principali delle idee di Poisson sulla natura intima della materia poiché, discostandosi progressivamente dal tradizionale riferimento al sistema di punti materiali privi di estensione adottato da Cauchy riesumando tacitamente il modello di Boscovich, esse aprono nuove vie al superamento dei limiti connessi a quel primo modello. Tralasciando le ancora generiche congetture formulate nella prima edizione del *Traité de mécanique* (1811), nelle quali la materia è supposta di «parties intimes» separate da spazi vuoti e tra le quali operano «ressorts immatériels», una piú consolidata concezione in linea con la meccanica molecolare laplaciana è rinvenibile nel "Mémoire sur l'équilibre des fluides" (estratto in *Annales de chimie et de physique*, **39**, 333-335, novembre 1828, pubblicato in *Mémoires de l'Académie Royal de sciences de l'Institut de France*, **9**, 1-88, 1830, in particolare pp. 2-6, 1830, letto il 24 novembre 1828): attribuendo dimensione finita alle molecole, Poisson afferma che l'azione fra due di esse «ne sera pas la même pour tous les points de ces deux petites masses; dans l'étendue de chaque molécule, on pourra la décomposer en deux parties: l'une égale à la moyenne de ses valeurs et commune à tous ses points [force principale], l'autre différente d'un point à un autre en grandeur et en direction [force secondaire]» (p. 3). Da quest'ultima forza dipenderebbero le composizioni chimiche, la forma delle molecole, la loro disposizione rispettiva e quindi la loro distribuzione regolare nei corpi cristallizzati; essa inoltre è la caratteristica distintiva tra fluidi e solidi amorfi e cristallizzati. Nei **fluidi**, Poisson ritiene che l'intervallo medio che separa due molecole consecutive sia invariabile con la direzione della retta attorno ad una qualunque molecola M; ciò che caratterizza i fluidi sta nel fatto che, sotto una pressione esterna, tale costituzione intima non varia poiché le molecole, «en se rapprochant plus ou moins, s'arrangent de manière que l'intervalle moyen (...) soit toujours égal suivant toutes les directions autour d'un point quelconque M. Cette propriété caractéristique des fluides parfaits est due à l'extrême mobilité de leurs molécules, résultant de ce qu'aux distances où elles sont les unes des autres, leur forme n'influe pas sensiblement sur leur action mutuelle» (p. 3): nei fluidi quindi l'azione secondaria è da ritenersi nulla. Nei **solidi non cristallizzati** le molecole sono distribuite come nei fluidi, nel senso che il loro intervallo medio è sensibilmente lo stesso lungo ogni direzione attorno ad un generico punto M: «mais il n'en sera plus de même si l'on comprime le corps solide par une force extérieure: l'intervalle moyen cessera d'être égal en tous sens autour du point M; et il arrivera même, en général, qu'il y aura diminution de cet intervalle dans les sens de la force donnée, et augmentation dans les autres directions. Or, la stabilité d'un semblable état d'équilibre suppose que les molécules se maintiennent dans la direction où elles sont le plus resserrées, par l'influence de leur forme sur leur action mutuelle, c'est-à-dire, que dans les solides, la force secondaire n'est pas nulle comme dans les fluides, ce qui constitue la différence essentielle de ces deux sortes de corps» (p. 5). Nei **solidi cristallizzati** infine, le molecole sono distribuite regolarmente e in modo differente a seconda della direzione uscente da un generico punto M; «elles se maintiennent dans cette disposition, en vertu de la partie secondaire de leur action mutuelle, et sans le secours d'aucune force extérieure; et c'est en cela que ces corps diffèrent des corps élastiques non-cristallisés» (p. 5). Nel "Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides" (Extrait in *Annales de chimie et de physique*, **42**, pp. 151-153, octobre 1829, pubblicato in *Journal de l'École polytechnique*, **13**, cahier 20, pp. 6-8, 1831, letto il 12 ottobre 1829) queste convinzioni sono meglio esplicitate assumendo che nei **fluidi** l'azione mutua fra di molecole «se réduira alors à une force unique, dirigée suivant la droite MM', et dont l'intensité sera une fonction de r que je représenterai par R» (extrait p. 151) e la cui espressione è del tipo $R = cc'\gamma - mm'\alpha - mc'\beta - m'c\beta'$, (con m e m' masse di due molecole, c e c' loro quantità di calorico, γ , α , β , β' coefficienti positivi dipendenti dalla natura delle molecole), ove l'unico termine repulsivo è connesso al calorico di ogni molecola mentre i termini attrattivi sono relativi al prodotto delle masse e all'attrazione fra materia e calorico. Quando però la distanza fra due molecole non è piú tale che la loro forma non manifesti un'influenza sensibile, «l'action de m' sur m ne sera plus dirigée nécessairement suivant la droite MM', et il pourra même arriver qu'elle ne se réduise pas à une seule force. Ses composantes seront toujours des fonctions de r (...) mais elles dépendront, en outre, des angles qui déterminent la direction de la droite MM', par rapport à des sections fixes dans l'intérieur de m et m'; en sorte qu'elles varieront, si l'une des molécules vient à tourner autour de l'autre ou sur elle-même, sans que la distance MM' de leurs centres de gravité ait changée». È questo il caso generale dei solidi; tuttavia, anche in un **solido non**

crystallizzato, l'azione totale tra le coppie di molecole appartenenti a due parti A e B, di estensione insensibile ma contenenti comunque un grandissimo numero di molecole, può ridursi, «comme dans le cas des fluides, à une force R, dirigée suivant la droite qui joint leurs centres de gravité M et M', et dont l'intensité ne sera fonction que de la distance MM'. En effet, quelle que soit cette action, on peut la remplacer par une semblable force, qui sera la moyenne des actions de tous les points de m sur tous ceux de m', et que l'on combinera avec une autre force R', ou, si cela est nécessaire, avec deux autres forces R' et R'', dépendantes de la disposition respective des deux molécules. Or, cette disposition n'ayant, par hypothèse, aucun sorte de régularité, et les nombres de molécules de A et B étant extrêmement grands et comme infinis, on conçoit que toutes les forces R' et R'' se compenseront sans altérer l'action totale de A sur B, qui ne dépendra par conséquent que des seules forces R. Il faut d'ailleurs ajouter que pour un même accroissement dans la distance, l'intensité des forces R' et R'' diminuent plus rapidement, en général, que celle des forces R; ce qui contribuera encore à faire disparaître l'influence des premières forces sur l'action mutuelle de A et B». Nel postumo "Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés" (*Mémoires de l'Académie Royal de sciences de l'Institut de France*, 18, 1842, letto il 28 ottobre 1839), Poisson specifica ulteriormente le sue idee; la centralità delle azioni nei **fluidi** si giustifica «soit parce que les dimensions de leur pores sont très-grandes, eu égard à celles de leurs molécules, soit à cause que celles-ci sont exactement **sphériques**» (p. 10). Nei **solidi** invece «l'action moléculaire dépend de la forme **non sphérique** des molécules; l'action mutuelle de deux molécules voisines m et m' n'y sera donc pas nécessairement dirigée suivant la droite MM'; et il pourra même arriver qu'elle consiste en deux forces non réductibles à une seule (...) Les intensités de ces deux forces seront des fonctions de r, nulle pour toute grandeur sensible de cette distance; mais elles varieront, en outre, avec la position de m' autour de m, et seront aussi, par conséquent, fonctions des deux angles qui déterminent la direction du rayon vecteur r de M'» (p. 10). Poisson sottolinea ulteriormente l'ipotesi che il raggio d'attività di ogni molecola, per quanto insensibile, è un multiplo elevato dell'intervallo molecolare. «Sans cette hypothèse, il serait impossible de soumettre au calcul les attractions et les répulsions des molécules (...) autrement qu'en les regardant, contrairement à la réalité, comme des masses continues. Mais, heureusement, notre supposition est conforme à ce qui a lieu dans la nature, et doit être admise comme telle, dans la physique et dans la chimie» (p. 11). Ribadendo la distinzione tra **solidi non cristallizzati** e **solidi cristallizzati**, Poisson precisa che nei primi l'azione mutua delle coppie di molecole m e m' di centri M e M' appartenenti a due piccole porzioni P e P' si riduce ad una sola forza diretta secondo MM' e funzione della sola distanza r, come nei fluidi. «Cela revient à faire abstraction de la force que nous venons de désigner par R' pour chaque couple de molécules, ainsi que de l'inégalité de la force R, à distance égale autour de m ou de m'. Et, en effet, cette force R' et cette inégalité de R proviennent de la non-sphéricité des molécules» (p. 11). D'altra parte, le molecole dei corpi non cristallizzati «sont distribuées dans le voisinage de chacune d'elles, sans aucune espèce de régularité, sous le rapport de leurs formes, de leurs situations respectives, et des leurs intervalles; d'après cela, on conçoit que le nombre de couples de molécules m et m' appartenantes à P et P', étant, par hypothèse, excessivement grand et comme infini, les effets de cette irrégularité doivent se compenser (...) et qu'il ne doit subsister qu'une sorte de résultat moyen, correspondant aux seules forces R fonction de r. C'est ici une conséquence nécessaire de la *loi des grandes nombres*. Mais quand il s'agira d'un corps cristallisé, cette compensation (...) n'aura plus lieu» (pp. 11-12). È importante osservare che Poisson, coerentemente con l'idea che le molecole hanno dimensioni finite, introduce a fianco delle componenti della traslazione quelle della rotazione molecolare, associando ad ogni molecola una terna d'assi (*axes mobiles*) ad essa solidale, ed ipotizza anche la possibilità di una deformazione delle stesse molecole. Ognuna di queste «est composé d'atomes ou de parties de matière pondérables, généralement d'espèces différentes, et d'une portion de calorifique. Les atomes d'une même espèce sont formés d'une matière et ont une figure propres et invariables. Le nombre des atomes de chaque espèce qui entrent dans une molécule, et la manière dont ils s'y disposent pour l'équilibre de leurs attractions et de la répulsion calorifique (...) déterminant la nature et la forme de cette petite masse. La nature chimique des corps dépend de cette nature et de cette forme moléculaires» (p. 124). Poisson osserva che le forze che operano fra gli atomi formanti una molecola sono estremamente grandi rispetto a quelle esistenti fra molecole diverse comunque vicine, «en sort que la figure de chaque molécule se trouve déterminée principalement par les forces intérieures» (p. 125) di modo che se, ad esempio, le forze esterne hanno provocato una diminuzione dell'intervallo medio delle molecole di 1/1000, la variazione di distanza tra gli atomi di una molecola può essere, «pour fixer les idées», di qualche milionesimo. In altri termini, se le dilatazioni lineari o cubiche dovute agli spostamenti molecolari sono dell'ordine delle derivate $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ etc. di tali spostamenti, le variazioni delle distanze tra gli atomi sono dell'ordine dei quadrati e dei prodotti di tali derivate. «C'est pour cela que nous les avons négligées, et que nous avons regardé la figure des molécules comme invariable pendant leur déplacement» (p. 126).

Questa insistenza sulle concezioni di Poisson non è fine a sé stessa; la possibilità di rotazioni molecolari, ammessa dallo scienziato francese senza trarne tutte le conseguenze nel suo ultimo lavoro sull'elasticità dei cristalli, ha costituito lo spunto dal quale Voigt è partito per rimuovere le limitazioni

La ragione di fondo delle critiche mosse da Poisson alla trattazione di Navier, nonostante quest'ultima conduca ad equazioni perfettamente conciliabili con quelle da lui stesso ottenute, verte sull'accennata conversione in integrali delle somme colle quali Navier aveva espresso l'azione su una molecola da parte di quelle circostanti poste entro la sua sfera d'attività. Da tale conversione discenderebbe infatti che un corpo, inizialmente nello stato naturale, permane libero da *stress* anche a seguito dell'applicazione delle forze esterne. Per chiarire questo singolare paradosso è necessario riprendere le fila del discorso alle sue origini, ripercorrendo gli sviluppi deducibili dalle (I.3.4-6) o (I.3.8) quando si metta in conto la deformazione del corpo. Si è detto del ruolo fondamentale di quelle formule come punto di partenza di tutta la meccanica molecolare; non si è chiarito però il loro significato fisico in relazione al successivo stato di tensione provocato dall'effetto deformativo delle forze esterne. Orbene, esse sono espressive proprio delle tensioni esistenti prima della deformazione e risultano identicamente nulle soltanto quando lo stato iniziale coincide con lo stato naturale⁵⁴, come può provarsi dall'esame delle equazioni d'equilibrio qualora si pongano uguali a zero le forze esterne e quelle di volume. È prevedibile allora che, non assumendo lo stato naturale quale stato iniziale del corpo, i sei valori delle tensioni iniziali debbano

dell'originario modello atomico. Non solo: spogliata dagli immaturi riferimenti alle cause fisiche della coesione, l'immagine di tali molecole composte ben si accorda con quella oggi in uso per i cristalli molecolari (cfr. Ludwig W., *Recent developments in lattice theory*, Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, **43**, Berlin, 1967, p. 52); infine, il trattamento di questi ultimi rivela le strette connessioni fra le attuali ricerche nella fisica dello stato solido e nella meccanica dei continui generalizzati (cfr. Mindlin R. D., "Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics", *Journal of elasticity*, **2**, 217-282, 1972).

⁵⁴ Navier definisce lo stato naturale come quello in cui tutte le azioni su una molecola M da parte delle circostanti «sont nulles, ou se détruisent réciproquement, puisque la molécule M est en repos» (*Bull. Soc. Phil.*, 1823, p. 177, *Mém. Inst.*, **7**, 1827, p. 376), ciò che rende ambigua la comprensione di uno stato di autotensione, come emergerà in occasione della polemica con Poisson. Quest'ultimo invece è alquanto più preciso, affermando che «lorsqu'un corps est dans son état naturel, c'est-à-dire lorsqu'il n'est comprimé par aucune force, qu'il est placé dans le vide, et qu'on fait même abstraction de son poids, non seulement chaque molécule est en équilibre dans son intérieur et à sa surface, mais on verra de plus (...) que la résultante des actions moléculaires est séparément nulle des deux côtés opposé de chaque petite partie du corps. Dans cet état, les distances que séparent le molécules doivent être telles que cette condition soit remplié, en ayant égard à leur attraction mutuelle et à la répulsion calorifique que nous comprenons aussi parmi les actions moléculaires. Quelque dur et quelque solide que soit un corps, la force qui s'oppose à la séparation de ses parties est nulle ou n'existe pas dans l'état dont nous parlons: elle ne commence à naître que quand nous cherchons à effectuer cette séparation, et que nous changeons un tant soit peu les distances des molécules» (*Mém. Inst.*, **8**, 1829, pp. 365-366). Per definire lo stato naturale, Cauchy considera «un corps solide placé sous le récipient d'une machine pneumatique après qu'on y a fait le vide» e suppone «que la température de l'espace qui environne ce corps soit partout la même. Ce que nous nommerons l'état naturel du corps solide, ce sera l'état d'équilibre auquel il pourra parvenir si les diverses parties de sa masse et les divers éléments de sa surface ne sont soumis à aucune force extérieure autre que l'action du calorique» (*Ex. Math.*, **3**, 1828 p. 167); Saint-Venant definisce lo stato naturale in accordo a Cauchy e Poisson e dimostra che tale stato è sempre possibile «au moins pour les corps *homogènes*», citando controesempi di corpi eterogenei (vessies gonflées e larmes bataviques) al cui interno esistono tensioni in assenza di forze esterne. Al riguardo Saint-Venant osserva: «En restituant la pesanteur [ovvero le forze di volume], les formules donnent une première série ou un premier système de déplacement ou de déformation à partir de l'état naturel (...) ainsi que les pressions intérieures qui ne résultent; puis, les pressions appliquées [alla superficie] en produisent d'autres, qu'on peut le plus sovent calculer directement, si l'on ne part que de l'état où la pesanteur agissant seule avait mis préalablement le corps élastique» (cfr. *Résumé des Leçons* di Navier, *Appendice complémentaire*, 1864, pp. 771-774).

comparire anche nelle nuove espressioni delle tensioni relative allo stato deformato. Spetta a Cauchy da un lato, con rigore tutto astratto e matematico, dimentico quasi dei risvolti meccanici del problema, e allo stesso Poisson dall'altro, secondo una formulazione meno generale ma piú attenta alle implicazioni fisiche, il merito di aver per primi dedotto quelle espressioni partendo dalle loro parallele definizioni di tensione.

In breve, si tratta di studiare gli sviluppi della formula (I.3.8) quando si consideri che nello stato deformato la densità ρ e la distanza r iniziali assumono i nuovi valori ρ_1 e r_1 e che, corrispondentemente, si modifica la direzione delle congiungenti fra le molecole. Se allora, riprendendo la trattazione di Cauchy nella chiara esposizione datale in seguito da Saint-Venant⁵⁵, indichiamo con

x_i le coordinate iniziali della molecola M , (con $i = 1, 2, 3$)

$x_i + u_i$ le sue nuove coordinate dopo gli spostamenti u_i , supposti «très-petits»;

$x_i + \Delta x_i$ le coordinate iniziali della molecola m ,

$x_i + \Delta x_i + u_i + \Delta u_i$ le sue nuove coordinate dopo gli spostamenti $u_i + \Delta u_i$,

e, per comodità, riscriviamo la (I.3.8) nella forma analoga

$$(I.4.1) \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m \frac{f(r)}{r} \Delta x_i \Delta x_j,$$

i nuovi valori delle tensioni nello stato deformato divengono

$$(I.4.2) \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \rho_1 \mathbf{S} m \frac{f(r_1)}{r_1} (\Delta x_i + \Delta u_i) (\Delta x_j + \Delta u_j).$$

Per la supposta piccolezza della variazione della distanza $r_1 - r = \frac{\Delta x_i}{r} \Delta u_i$ rispetto alla distanza iniziale r , si può sviluppare la funzione $\frac{f(r_1)}{r_1}$ limitandosi al termine di primo grado in tale variazione, ottenendo

$$(I.4.3) \quad \frac{f(r_1)}{r_1} = \frac{f(r)}{r} + (r_1 - r) \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] = \frac{f(r)}{r} + (\Delta x_1 \Delta u_1 + \Delta x_2 \Delta u_2 + \Delta x_3 \Delta u_3) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right],$$

per cui, sostituendo nella (I.4.2) ed esplicitando esemplificativamente per le due componenti σ_{11} e σ_{23} , si trova

$$(I.4.4) \quad \sigma_{11} = \frac{1}{2} \rho_1 \mathbf{S} m \left\{ \frac{f(r)}{r} \Delta x_1^2 + 2 \frac{f(r)}{r} \Delta x_1 \Delta u_1 + (\Delta x_1^3 \Delta u_1 + \Delta x_1^2 \Delta x_2 \Delta u_2 + \Delta x_1^2 \Delta x_3 \Delta u_3) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] \right\},$$

⁵⁵ Cfr. la XXII Lezione delle *Leçons de mécanique analytique* curate dall'Abbé Moigno, 1868, pp. 676-683.

$$(I.4.5) \quad \sigma_{23} = \frac{1}{2} \rho_1 \mathbf{S} \, m \left\{ \frac{f(r)}{r} \Delta x_2 \Delta x_3 + \frac{f(r)}{r} \Delta x_3 \Delta u_2 + \frac{f(r)}{r} \Delta x_2 \Delta u_3 \right. \\ \left. + (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta u_1 + \Delta x_2^2 \Delta x_3 \Delta u_2 + \Delta x_3^2 \Delta x_2 \Delta u_3) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] \right\}.$$

Lo sviluppo di Taylor delle variazioni Δu_i degli spostamenti fornisce

$$(I.4.6) \quad \Delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \Delta x_j \Delta x_k \right) + \dots,$$

per cui, limitandosi ai termini del primo ordine nelle variazioni Δx_j si ha, in forma esplicita,

$$r_1 - r = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x_1^2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Delta x_2^2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Delta x_3^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \Delta x_2 \Delta x_3 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \Delta x_3 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \Delta x_1 \Delta x_2 \right]$$

Infine, il nuovo valore della densità si ottiene osservando che, nello stato deformato, ogni elemento del corpo ha cambiato il suo volume proporzionalmente al prodotto

$$\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right),$$

per cui si trova

$$(I.4.7) \quad \rho_1 = \frac{\rho}{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)} = \rho \left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

Se ora, nello spirito dell'approssimazione sin qui seguita, si sostituiscono nelle (I.4.4–5) le espressioni (I.4.6) delle variazioni degli spostamenti Δu_i approssimate al primo ordine e (I.4.7) della nuova densità conservando solo i termini di primo grado nelle derivate degli spostamenti, si perviene alle attese relazioni

$$(I.4.8) \quad \sigma_{11} = \sigma_{11}^0 \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2 \sigma_{12}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + 2 \sigma_{31}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ + c_{1111} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{1122} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{1133} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + c_{1123} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + c_{1131} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + c_{1112} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

$$(I.4.9) \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^0 \left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{31}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \sigma_{22}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ + c_{2311} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{2322} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{2333} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + c_{2323} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + c_{2331} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + c_{2312} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

ove si è posto

$$(I.4.10) \quad \sigma_{ij}^0 = \frac{1}{2} \rho \sum m \frac{f(r)}{r} \Delta x_i \Delta x_j = \frac{1}{2} \rho \sum m r f(r) n_i n_j$$

$$(I.4.11) \quad c_{ijhk} = \frac{1}{2} \rho \sum m \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h \Delta x_k = \frac{1}{2} \rho \sum m r^3 \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] n_i n_j n_h n_k .$$

Sono queste le espressioni generali delle tensioni dedotte da Cauchy per il «système de points matériels»⁵⁶; in esse, come mostra la (I.4.11), si riconosce che nel caso generale di anisotropia il numero dei coefficienti elastici c_{ijhk} effettivamente distinti è al più 15, per la validità delle ulteriori sei *relazioni di Cauchy* $c_{ijhk} = c_{ihjk}$, la paternità delle quali è stata giustamente attribuita allo studioso francese dalla letteratura successiva⁵⁷.

Per particolari simmetrie nella distribuzione delle molecole, lo stesso Cauchy ha mostrato quali delle quantità σ_{ij}^0 e c_{ijhk} possano sopravvivere⁵⁸; nel caso limite d'isotropia le formule generali (I.4.8-9) divengono infine⁵⁹:

56 Cauchy A.-L., "Sur les équations différentielles ...", pp. 130-134.

57 Nell'ambito della classica teoria matematica dell'elasticità si distinguono 21 coefficienti elastici c_{ijhk} nel caso generale di anisotropia. I 36 coefficienti della teoria continuista di Cauchy si riducono infatti a 21 per le quindici uguaglianze $c_{ijhk} = c_{hki j}$ connesse all'esistenza di un potenziale elastico per la prima volta postulata da Green (1837). Le ulteriori sei relazioni $c_{ijhk} = c_{ihjk}$ sono invece conseguenza della formulazione molecolare e discendono dalla completa simmetria della (I.4.11) rispetto ai quattro indici i, j, h, k .

58 Cauchy A.-L., "Sur l'équilibre et le mouvement ..."; in questa prima memoria sul «système de points matériels» le simmetrie fra le costanti sono introdotte a seguito della deduzione delle equazioni di equilibrio in maniera diretta, senza passare cioè dalla considerazione della tensione come visto in precedenza, ma semplicemente imponendo le condizioni d'equilibrio di una molecola a partire da uno stato iniziale qualsiasi del corpo (generalizzando quindi la trattazione di Navier, implicitamente riferita allo stato naturale). Seguendo ancora l'analoga ma più concisa esposizione di Saint-Venant (cfr. *XXII Leçon* del Moigno, pp. 690-693), le condizioni d'equilibrio di una molecola soggetta alle forze esterne F_i^0 nello stato iniziale

$$M \sum \left[m \frac{f(r)}{r} \Delta x_i \right] + M F_i^0 = 0$$

divengono, dopo lo spostamento (e dividendo per M),

$$\sum \left[m \frac{f(r)}{r} (\Delta x_i + \Delta u_i) \right] + F_i^0 + F_i^1 = 0.$$

Sostituendo l'espressione (I.4.3) e svolgendo le moltiplicazioni sopprimendo quadrati e prodotti delle variazioni Δu_i per la supposta piccolezza degli spostamenti, le tre equazioni d'equilibrio dopo lo spostamento, tenendo conto di quelle prima, diventano

$$\sum m \left\{ \frac{f(r)}{r} \Delta u_i + \Delta x_i \Delta x_j \Delta u_j \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] \right\} + F_i^1 = 0.$$

In base agli sviluppi di Taylor (I.4.6) nei quali si conservi ora i termini del secondo ordine in Δx_i , si riconosce che le derivate prime $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ degli spostamenti sono moltiplicate per somme aventi le due forme dispari in Δx_i (ovvero nei coseni n_i)

$$\sum m \frac{f(r)}{r} \Delta x_i \quad \sum m \left\{ \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] \right\} ,$$

mentre le derivate seconde $\frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_h}$ sono moltiplicate per somme aventi le due forme pari in Δx_i

$$\frac{1}{2} \sum m \frac{f(r)}{r} \Delta x_i \Delta x_j \quad \frac{1}{2} \sum m \left\{ \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h \Delta x_k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] \right\} ,$$

Ora, poiché Cauchy assume, come già riscontrato in merito alla definizione di tensione, che le molecole, uguali fra loro due a due, sono distribuite nello stato iniziale «symétriquement de part et d'autre de la molécule M sur des droites menées par le point $[x_i]$ avec lequel cette molécule coïncide» (p. 198), le somme dispari si annullano

$$(I.4.12) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma^0 (1 + \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) + \mu(3 \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ &= \sigma^0 + (\sigma^0 + 3\mu) \varepsilon_{11} + (\mu - \sigma^0) (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \end{aligned}$$

$$(I.4.13) \quad \sigma_{23} = (\sigma^0 + \mu) \gamma_{23} = 2(\sigma^0 + \mu) \varepsilon_{23}$$

ove le costanti σ^0 , tensione (normale) iniziale uniforme, e μ , unico coefficiente elastico, sono date rispettivamente dalle (I.4.10) e (I.4.11) per qualsiasi scelta di i, j, h, k .

Nel citato “Mémoire”, Poisson esprime i valori delle due costanti σ^0 e μ in funzione dell'intervallo molecolare medio α dopo aver convertito in integrali le somme relative ai soli angoli, pervenendo alle formule⁶⁰

e quelle pari coincidono, a meno della densità ρ a fattore moltiplicativo, con le espressioni (I.4.10) e (I.4.11) sopra riportate. Le ulteriori simmetrie introdotte da Cauchy discendono dai seguenti casi:

1) se, nello stato iniziale, «les molécules sont distribuées symétriquement par rapport à chacune des trois plans qui, renferment le point $[x_i]$, sont parallèles aux plans coordonnés, et si deux molécules symétriquement placées à l'égard d'un des trois plans offrent toujours des masses égales» (p. 198), delle sei somme (I.4.10) sopravvivono solo le tre $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{33}^0$; le quindici somme (I.4.11) si riducono alle sei $c_{1111}, c_{2222}, c_{3333}, c_{2233}, c_{3311}, c_{1122}$;

2) se, nello stato iniziale, le molecole sono distribuite «de la même manière par rapport aux trois plans menés par la molécule M parallèlement aux plans coordonnés» (p. 199), si ha $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0, c_{1111} = c_{2222} = c_{3333}, c_{2233} = c_{3311} = c_{1122}$;

3) se, infine, «les molécules sont distribuées autour de la molécule M de manière que les valeurs des sommes (...) deviennent indépendentes des directions assignées aux axes» (p. 200), il sistema è isotropo e si ha ulteriormente $c_{1111} = 3c_{1122}$. Nel successivo articolo “De la pression ...” Cauchy riporta le formule relative ai casi precedenti sia quando lo stato iniziale è qualsiasi sia quando coincide con lo stato naturale.

⁵⁹ Cauchy A.-L., “De la pression ...”, p. 231, ove per Cauchy è $(\sigma^0 + \mu) = \frac{1}{2}k$ e $(\mu - \sigma^0) = K$; “Sur les équations différentielles ...”, p. 136, ove $\sigma^0 = G\Delta$ e $\mu = R\Delta$, con Δ corrispondente alla nostra densità ρ .

⁶⁰ Poisson S.-D., op. cit., p. 381. Il ragionamento è il seguente: nelle somme esprimenti le componenti di tensione, Poisson trasforma in coordinate polari le coordinate cartesiane delle molecole m agenti su M , pervenendo a somme della forma $\sum[(\sum p) F(r)]$, ove p è una funzione dei seni e coseni degli angoli dei raggi vettori r cogli assi e $F(r)$ è una funzione «de la même espèce que $f(r)$, dont les valeurs sont insensibles pour toute valeur sensible de la variable, et qui, en outre, est égale à zéro pour la valeur particulière zéro de r » (p. 377); pensata una superficie sferica di centro M e raggio r suddivisa in un gran numero di parti «assez petits pour qu'on puisse regarder dans chacune d'elles la quantité p comme sensiblement constante» (p. 377), Poisson esprime con sr^2 la superficie di una di queste parti (con s coefficiente indipendente da r esprimente quella parte di superficie rispondente a $r = 1$) e definisce con sr^2/α^2 il numero di molecole ad essa appartenenti se, «comme nous supposons d'abord, r est très-grand par rapport à α » (p. 378); in tal modo, la doppia somma $\sum\sum p$ estesa a tutta la superficie sarà data da $r^2/\alpha^2 \sum\sum ps$, ove la nuova somma si intende estesa a tutte le parti s della superficie di raggio unitario; ora, conclude Poisson, «vu la petitesse de ces parties, et parce que p n'est une fonction du genre de celles qui décroissent très-rapidement, on pourra changer s en l'élément différentiel de cette dernière surface, et les signes \sum en des signes d'intégration» (p. 378), ciò che conduce alle formule (I.4.16-17). Queste ultime contengono, rispetto al testo originale, anche il prodotto Mm al numeratore, assente nel “Mémoire” per la sottintesa ipotesi di masse uguali e unitarie per le molecole.

A somme corrispondenti alle (I.4.16-17) Poisson perviene anche nel “Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides” (*J. Éc. pol.*, 13, Cahier 20, 1-174, 1831, p. 46); in questa memoria Poisson indica $K = \frac{Mm}{6\alpha^3} \sum r f(r)$ e $k = \frac{Mm}{30\alpha^3} \sum r^3 \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right]$. Si passa da queste ultime espressioni a quelle della prima memoria moltiplicando le quantità sotto la somma \sum per il numero di molecole contenute in un sottile strato compreso tra due sfere di centro M e raggio r e $r+\alpha$, numero

$$(I.4.14) \quad \sigma^0 = \frac{2\pi}{3} \frac{mM}{\alpha^5} \sum r^3 f(r) \quad (= K \text{ nella notazione di Poisson})$$

$$(I.4.15) \quad \mu = \frac{2\pi}{15} \frac{mM}{\alpha^5} \sum r^5 \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] \quad (= k \text{ nella notazione di Poisson}).$$

Consapevole della delicatezza del passaggio, Poisson ne giustifica l'adozione in questi termini: «[c]e résultat exige, à la vérité, que r soit un multiple très-considérable de α ; mais d'après la supposition que nous avons faite sur le mode de décroissement de l'action moléculaire [e cioè che il raggio d'attività delle molecole sia grandissimo rispetto agli intervalli che le separano e che la diminuzione rapida dell'azione molecolare non abbia luogo che quando la distanza è divenuta un multiplo elevato di tali intervalli], on peut, sans erreur sensible, négliger dans la somme relative à r , la partie où cette condition n'est pas remplie par rapport à l'autre partie (...) et il sera permis de comprendre dans la somme ou de négliger à volonté les plus petites valeurs de r , puisque la partie de cette somme qui s'y rapporte n'altère pas sensiblement la somme entière: nous supposerons, pour fixer les idées, qu'elle s'étend depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \infty$ »⁶¹.

La restante somma in r sembra invece rivelare un'intrinseca irriducibilità all'esser espressa in forma d'integrale. Una volta sostituito α con dr , cioè moltiplicato entro le somme per dr/α , numero frazionario esprime quante volte α è contenuto in dr , Poisson trova infatti, integrando per parti in k

$$(I.4.16) \quad \sigma^0 = \frac{2\pi}{3} \frac{mM}{\alpha^6} \int_0^{\infty} r^3 f(r) dr$$

$$(I.4.17) \quad \mu = \frac{2\pi}{15} \frac{mM}{\alpha^6} \int_0^{\infty} r^5 \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] dr = \frac{2\pi}{15} \rho^2 \left\{ \left[r^4 f(r) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 5r^3 f(r) dr \right\} = -\sigma^0$$

In questa argomentazione è insita l'ipotesi, assunta da Poisson senza alcuna esplicita giustificazione, che la funzione delle forze $f(r)$, oltre a tendere rapidamente a zero per valori sensibili di r , «est égale à zero pour la valeur particulière zéro de r »⁶²; ciò consente allora di riconoscere il paradosso $\mu = -\sigma^0$ (nelle notazioni di Poisson $k = -K$) «si l'on fait attention que

che vale $\frac{4\pi r^2 \alpha}{\alpha^3}$; in questo modo la somma \sum relativa a tutte le molecole m che circondano M è sostituita da una somma relativa alle grandezze di r crescenti di α in α .

61 Poisson S.-D., op. cit., pp. 378-379.

62 Ibidem, p. 377.

$f(r)$ est nulle aux deux limites (...). Au rest, la formule d'Euler, qui sert à transformer les sommes en intégrales, contient une série ordonnée suivant les puissances de la différence finie de la variable, qui n'est pas toujours convergente, quoique cette différence soit supposée très-petite. L'exception a lieu surtout dans le cas des fonctions comme $f(r)$ qui varient très-rapidement...»⁶³. Poisson rimanda qui alle considerazioni svolte nell'articolo “Sur le calcul numérique des intégrales définies” (*Mém. Acad.*, **6**, 571-604, 1827) e riprese nel secondo grande “Mémoire” del 1831, ove è mostrato che la formula di Eulero può approssimare una certa somma $p = \phi(\alpha) + \phi(2\alpha) + \phi(3\alpha) + \dots$ (ove α è un intervallo finito) «si la fonction n'était composée que d'un seul terme et qui ne changerait pas de signe (...). Mais cela n'a pas lieu dans la nature où l'action moléculaire provient de deux forces, l'une attractive et l'autre répulsive (...))»⁶⁴. Assumendo, ad esempio, una forma del tipo $\phi(x) = ce^{-x/a} - c'e^{-x/a'}$ ove c, c', a, a' sono costanti positive, Poisson trova

$$p = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \phi(x) dx - \frac{1}{2} \phi(0) = \frac{1}{\alpha} [c'a'e^{-x/a'} - cae^{-x/a}]_0^{\infty} - \frac{1}{2}(c - c') = \frac{ca}{\alpha} - \frac{c'a'}{\alpha} - \frac{1}{2}(c - c')$$

e conclude che, sebbene a/α e a'/α siano numeri estremamente grandi, «il suffira que les coefficients c et c' soient, à très-peu près, en raison inverse de ces nombres, pour que la valeur

de $\phi(0)$ soit comparable et même supérieure à celle de $\frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \phi(x) dx$. Cette remarque suffit pour

montrer comment la somme que p représente ne se réduit pas nécessairement à l'intégrale $\frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \phi(x) dx$, qui n'est qu'une partie de sa valeur»⁶⁵.

Un'anticipazione di questi risultati era apparsa sul numero di aprile degli *Annales de chimie et physique* del 1828, nell'estratto di presentazione del “Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques”, ove Poisson così si era espresso: «[l]orsqu'un corps est dans son état naturel (...), non seulement chaque molécule est en équilibre dans son intérieur et à sa surface, mais on verra de plus, dans ce Mémoire, que la résultante des actions moléculaires est séparément nulle des deux côtés opposés de chaque petite partie du corps (...). Or, si l'on exprime cette force par une intégrale, il arrive que sa valeur étant nulle dans l'état naturel du corps, elle le sera encore après la variation quelconque des distances moléculaires, en sorte que le corps n'opposerait aucune résistance. Il ne résulte que la somme qui exprime l'action totale d'une série de molécules disjointes ne peut pas se convertir en une

63 Ibidem, p. 399.

64 Poisson S.-D., op. cit., p. 14.

65 Ibidem, p. 15.

intégrale définie, ce qui tient à la nature de la fonction des distances qui représentent l'action de chaque molécules»⁶⁶.

I. 5. L'irrisolta polemica fra Navier e Poisson.

Colto sul vivo per l'esclusione dalla schiera dei «géomètres» ricordati da Poisson nel preambolo storico dell'estratto prima citato, Navier non tardò a replicare e, come accade in ogni discussione che nasconde un mal sopito scontro personale, si appigliò alla mancata citazione per eludere una replica diretta sul punto scottante, in attesa che la prevista pubblicazione del “Mémoire” chiarisse «si ce point doit être l'objet d'une discussion, ou s'il doit être abandonné au jugement des géomètres»⁶⁷.

Prima ancora dell'attesa uscita del “Mémoire”, Poisson tornò sull'argomento sottolineando che «[s]i M. Navier eût considéré l'état naturel et l'état varié d'un corps élastique, et qu'il eût continué d'exprimer le coefficient constante, comme il fait, par une intégrale, il se serait aperçu que cette quantité devant être nulle dans le premier état, elle le serait encore dans le second, ce qui rendrait impossible l'équilibre des forces données»⁶⁸.

Tale obiezione fa riferimento al modo in cui Navier aveva descritto l'insorgere delle forze molecolari sotto l'effetto dei carichi; egli infatti, in base all'ambigua ipotesi che nello stato naturale tutte le azioni tra le coppie di molecole M, m «sont nulles ou se détruisent réciproquement, puisque la molécule M est en repos»⁶⁹, si era limitato ad esprimere l'azione sviluppata fra due di esse attraverso il prodotto $(r_1 - r) F(r)$ della piccola variazione della loro distanza per una certa funzione delle forze. Alle accuse di Poisson per le quali una tale espressione porterebbe ad equazioni soltanto formalmente coincidenti con quelle da lui ottenute, ma in realtà essenzialmente differenti «par l'expression du coefficient dépendent de la nature du corps»⁷⁰, Navier ribatté che «[i]l ne suffirait pas de dire que l'on a trouvé les

⁶⁶ Poisson S.-D., “Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques”, *Annales de chimie et de physique*, **37**, 337-355, avril 1828, pp. 346-347. Un precedente accenno al “Mémoire” in corso di preparazione è riportato nella “Note sur les vibrations des corps sonores”, *Annales de chimie et de physique*, **35**, 86-93, septembre 1827.

⁶⁷ Navier C.-L., “Note relative à l'article intitulé: Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, page 337 du tome précédent”, *Annales de chimie et de physique*, **38**, 304-314, juillet 1828.

⁶⁸ Poisson S.-D., “Réponse à une note de M. Navier insérée dans le dernier Cahier de ce Journal”, *Annales de chimie et de physique*, **38**, 435-440, août 1828, p. 437

⁶⁹ Navier C.-L., “Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques”, *Bulletin des sciences par la Société Philomatique de Paris*, 177-181, Paris, 1823, p. 177.

⁷⁰ Poisson S.-D., “Réponse ...”, p. 437.

mêmes équations d'une autre manière, en assurant, sans le prouver, que cette manière vaut mieux que la mienne»⁷¹. Si trattava, in realtà, di un'obiezione fondamentalmente corretta, ma espressa in modo confuso da Poisson, contro una replica apparentemente vincente, ma insostenibile da Navier a meno di una più chiara presa di posizione sul valore delle azioni nello stato naturale.

Ripercorrendo la trattazione di Cauchy, si è visto infatti che l'azione $f(r_1)$ fra due molecole la cui distanza iniziale r è divenuta r_1 vale, arrestando lo sviluppo di Taylor alla prima potenza nella piccola differenza $(r_1 - r)$,

$$(I.5.1) \quad f(r_1) = f(r) + (r_1 - r) f'(r).$$

Ora, se, con Navier, si conserva solo il secondo termine, ne consegue, come poi evidenziato lucidamente da Saint-Venant⁷², non solo il prevedibile annullarsi delle tensioni iniziali (I.4.10), ma anche la nuova forma dei coefficienti elastici

$$(I.5.2) \quad c_{ijhk} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m \frac{1}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h \Delta x_k$$

in sostituzione di quella completa (I.4.11) che qui riportiamo

$$(I.5.3) \quad c_{ijhk} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h \Delta x_k .$$

Eseguendo la derivazione, quest'ultima diviene

$$(I.5.4) \quad c_{ijhk} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m \frac{1}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h \Delta x_k - \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m \frac{f(r)}{r^3} \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h \Delta x_k ,$$

la cui seconda parte non è nulla, poiché né le condizioni esprimenti, nello stato naturale, l'equilibrio delle azioni iniziali su una molecola

$$(I.5.5) \quad \mathbf{S} m f(r) \frac{\Delta x_i}{r} = 0 ,$$

né quelle relative all'annullarsi delle tensioni iniziali

$$(I.5.6) \quad \sigma_{ij}^0 = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} m \frac{f(r)}{r} \Delta x_i \Delta x_j = 0 ,$$

71 Navier C.-L., "Remarques sur l'article de M. Poisson, insérée dans le Cahier d'août, page 435", *Annales de chimie et de physique*, **39**, 145-151, octobre 1828, p. 147.

72 Cfr. la *XXII Leçon* scritta da Saint-Venant nella *Mécanique analytique* del Moigno, p. 696.

implicano necessariamente che si abbia

$$(I.5.7) \quad \frac{1}{2} \rho \sum m \frac{f(r)}{r^3} \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h \Delta x_k = 0$$

a meno di assumere $f(r) = 0$, come potrebbe evincersi solo dalla prima alternativa del testo di Navier soprariportato.

A “Mémoire” pubblicato, Poisson si risolse a por termine alla diatriba con una lettera⁷³ al confrère Arago, redattore degli *Annales*, fiducioso negli argomenti in esso estesamente svolti. Al contrario, essi dovevano esser oggetto di un'ulteriore durissima replica di Navier.

Nella lettera di risposta al comune confrère⁷⁴, le nuove critiche di Navier si appuntarono anzitutto sulla plausibile forma della funzione delle forze suggerita da Poisson «pour jeter plus de clarté sur son travail», e cioè

$$(I.5.7) \quad f(r) = a b^{-r/n\alpha^m},$$

in cui r è la distanza variabile, a una costante qualunque, b un'altra costante maggiore di uno, m un esponente positivo molto grande, α l'intervallo tra due molecole consecutive e n un numero intero molto grande, tale tuttavia che il prodotto $n\alpha$ sia un segmento di lunghezza impercettibile. Proposta da Poisson per mostrare qualitativamente l'andamento pressoché costante delle azioni, finché r è piccolo in confronto a $n\alpha$, ed il loro rapido annullarsi non appena $r > n\alpha$, quella funzione è disgraziatamente monotona, cosa che Navier notò immediatamente denunciandola come «entièrement incompatible avec la notion d'un corps solide»⁷⁵, potendo esprimere unicamente repulsioni od attrazioni.

Ma al di là di questa facile critica, frutto di un'ingenuità che abbiám visto rimediata dallo stesso Poisson, le obiezioni di Navier risultano piú calzanti laddove le argomentazioni di Poisson vorrebbero essere stringenti. In effetti, il paradosso $\mu = -\sigma^0$ (cioè $k = -K$) discende dalla presunzione che « $f(r)$ est nulle aux deux limites». Volendo ammettere «une inadvertence ou une faute d'impression» nel testo del “Mémoire”, Navier osservò infatti che, in base alla (I.4.17), si dovrebbe intendere che il prodotto $r^4 f(r)$, e non semplicemente $f(r)$, si annulla ai due limiti. In qualsiasi caso «le lecteur ne voit pas la nécessité que $r^4 f(r)$ soit nulle à la limite correspondante à $r = 0$. Il existe une infinité de formes qui pourraient être adoptées pour la fonction inconnue $f(r)$, d'après lesquelles cette circonstance n'aurait lieu. On est donc

⁷³ Poisson S.-D., “Lettre de M. Poisson à M. Arago”, *Annales de chimie et de physique*, **39**, 204-211, octobre 1828.

⁷⁴ Navier C.-L., “Lettre de M. Navier à M. Arago”, *Annales de chimie et de physique*, **40**, 99-107, janvier 1829.

⁷⁵ Ibidem, p. 101.

ici obligé de penser que la conclusion de l'auteur n'est point fondée; et qu'il faudrait, pour qu'elle emportât la conviction, qu'il eût commencé par montrer qu'il est nécessaire d'exclure toutes les formes de la fonction $f(r)$ pour lesquelles on n'aurait point $r^4 f(r) = 0$ quand $r = 0$ »⁷⁶. In questo modo «la difficulté d'accorder l'état naturel du corps avec l'état varié, c'est-à-dire, de faire en sorte que k conserve une valeur, tandis que K est nul, n'existe véritablement pas; ou du moins il n'est pas nécessaire, pour la résoudre, de supposer que les quantités k , K sont des sommes plutôt que des intégrales: il suffit de supposer que $r^4 f(r)$ n'est pas nul quand $r = 0$. Donc encore on peut être rassuré sur l'exactitude des solutions données par M. de Laplace et par d'autres géomètres, dans lesquelles les actions moléculaires sont représentées par des intégrales»⁷⁷.

È un peccato che Navier non abbia approfondito questo spunto, specificando per quale possibile scelta della funzione $f(r)$ tale condizione sia soddisfatta contemporaneamente a quella che dà $r^4 f(r) = 0$ quando r tende a infinito, ma è probabile che ragioni “tattiche” nella conduzione della polemica lo abbiano motivato in tal senso; spiazzando l'avversario sull'imbarazzante interrogativo, egli colse infatti l'occasione per tornare sull'ipotesi ambiguamente espressa intorno alle azioni intermolecolari nello stato naturale e prendere opportunamente partito a favore della prima alternativa, ritenendo in tal modo di mettersi «à l'abri des objections qu'il a énoncées».

Nella successiva “Note” che Arago⁷⁸ stese con l'intento di por fine alla prolungata diatriba, tale scelta doveva però essere criticata come difficilmente adottabile «par les physiciens», poiché da essa «il semble résulter qu'*individuellement* elles [les molécules] agissent d'une manière différente, suivant qu'on les considère quand le corps est ou n'est pas soumis à l'action de forces extérieures. Dans cette hypothèse (...) il n'y a plus à chercher de rapport entre les forces développées dans l'état varié et celles qu'on admettait dans l'état naturel du corps, état où, suivant M. Navier, il n'existe plus de forces»⁷⁹. Divenute «sans objet», le pur corrette obiezioni di Poisson vengono meno; tuttavia «il resterait à faire voir comment M. Navier peut entendre la constitution d'un corps dont *tous* les points sont, dans l'état naturel, sans action les uns sur les autres»⁸⁰.

Con questo nuovo interrogativo Arago intendeva chiudere la contesa. Ancora una volta invece, e finalmente in modo definitivo, Navier ribatté le sue ragioni trovando voce sul

76 Ibidem, p. 102.

77 Ibidem, pp. 102-103.

78 Arago F., “Note du rédacteur”, *Annales de chimie et de physique*, **40**, 107-110, janvier 1829.

79 Ibidem, p. 108.

80 Ibidem, p. 108.

piú ospitale *Bulletin de Férussac*⁸¹, nelle cui pagine un giudizio a lui piú benevolo era stato espresso poco tempo prima da Duhamel⁸². In quest'ultima requisitoria quel nuovo interrogativo era riproposto al mittente con la richiesta di «*prouver* qu'il est possible de remplir la condition [$\sum r^3 f(r) = 0$, quella, cioè, che deve valere nello stato naturale in conformità alla (I.4.14)], autrement qu'en faisant $f(r) = 0$ ». Non solo: la mancata risposta al precedente sembrò a Navier una ragione di piú «pour montrer que la proposition avancée par M. Poisson n'a véritablement aucun fondement»⁸³.

A chi dunque attribuire il primato nell'accesa querelle ? Di certo, la trattazione di Poisson ha il merito della generalità, includendo la disamina corretta dello stato naturale assente in Navier per il mancato riferimento alla definizione di tensione, benché la via lagrangiana seguita da quest'ultimo sia percorribile con esiti altrettanto generali qualora si conservi l'espressione completa $f(r_1) = f(r) + (r_1 - r) f'(r)$, come mostrato da C. Neumann nel 1859⁸⁴; per contro, il punto forte dell'argomentazione di Poisson esce indebolito, se non compromesso, dalla calzante critica di Navier sull'annullarsi del prodotto $r^4 f(r)$; non a caso, nell'ultimo lavoro apparso postumo nel 1842, Poisson espresse diversamente le sue convinzioni affermando che, se le somme esprimenti le quantità K e k (in questo lavoro Poisson indica K con h e k con k/5) potessero convertirsi in integrali, si dovrebbe assumere

81 Navier C.-L., “Note relative a la question de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques”, *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques (Férussac)*, **11**, 243-253, 1829.

82 Duhamel J.M.C., “Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques”, *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques (Férussac)*, **11**, 98-111, 1829. Si tratta di una recensione del “Mémoire” di Poisson nella quale Duhamel sembra voler giustificare i risultati di entrambi gli autori. Egli ritiene che la teoria di Navier è esatta solo se si assume uguale a zero l'azione scambiata tra due molecole nello stato naturale ed osserva che «dans cette hypothèse de M. Navier, il résulte qu'il n'a pas besoin de supposer $\int r^3 f(r) dr = 0$ et que par suite $\int r^4 f'(r) dr$ [quantità proporzionale al coefficiente elastico di Navier] n'est pas nul; d'où il suit que tous les termes de ses équations ne s'évanouissent pas» (pp. 110-111). Poisson al contrario, conservando un valore non nullo per l'azione tra due molecole nello stato naturale, è condotto, «pour la possibilité de cet état, à la condition $\sum r^3 f(r) = 0$, mais cette condition n'entraîne pas $\sum r^5 \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] = 0$ parce que ces sommes ne sont pas des intégraux; les termes ne disparaissent donc pas de l'équation de M. Poisson» (p. 111). Questa scelta di neutralità non ci sembra peraltro convincente poiché, rendendo del tutto inconfondibili le due trattazioni, evade esattamente ciò che Poisson contestava a Navier.

83 Navier C.-L., “Note ...”, p. 251.

84 Neumann C., “Zur Theorie der Elasticität”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **57**, 281-318, 1860, pp. 283-285. I metodi propri della *Mécanique analytique*, generalmente abbandonati in Francia dopo Navier, hanno trovato nei paesi anglosassoni una nuova patria d'adozione, seppur con esiti non sempre felici. Ricordiamo, ad esempio, il singolare tentativo di S. Haughton (“On the equilibrium and motion of solid and fluid bodies”, *Transactions of the Royal Irish Academy*, **21**, 151-198, 1848) di ripercorrere la soluzione di Navier estendendola al caso dei fluidi e dei solidi anisotropi e coniugandola con una propria classificazione del comportamento materiale: secondo tale classificazione, nello sviluppo $f(r_1) = f(r) + (r_1 - r) f'(r)$ il primo termine connoterebbe le azioni nei fluidi perfetti ed il secondo quelle nei solidi, mentre la conservazione di entrambi sarebbe necessaria a descrivere il comportamento intermedio dei fluidi viscosi.

come estremi d'integrazione $r = 0$ e $r = r'$ (al limite infinito), «ce qui rendrait **le produit de $f(r)$ et de toute puissance positive de r** , nul aux deux limites $r = 0$ e $r = r'$ »⁸⁵.

In ogni caso, i tempi di una risposta piú esauriente erano ancora lontani a venire. Nondimeno, il dilemma dell'impossibilità di convertire le somme in integrali era certo argomento di non poco conto per chi cercasse una “conferma matematica” alle proprie convinzioni sulla natura discreta della materia. Il nostro riferimento va qui al maggior esponente dell'ipotesi molecolare, vale a dire a quel Barré de Saint-Venant che abbiamo già visto intervenire sulla definizione di tensione e che ritroveremo sul nostro cammino, in veste di accanito difensore di quell'ipotesi, ogni qual volta si porrà l'urgenza di chiarirne i fondamenti o di ribadirne le conseguenze.

Quando ormai era sopita l'irrisolta polemica tra i due «hommes éminents», egli tornò infatti sul delicato problema con un “Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues, et sur la nature probable des dernières particules des corps” nel quale, prendendo spunto dal singolare paradosso ravvisato da Poisson, enunciava ragioni fisiche e metafisiche per «renoncer à tout amas de matière continue et (...) regarder plutôt les dernières particules des corps comme *des points sans étendue*, non contigus, centres d'action des forces répulsives et attractives»⁸⁶, in nome di quel *système de Bosovich* al quale rimase fedele fino al termine del suo percorso di pensatore e di scienziato.

85 Poisson S.-D., “Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés”, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, **18**, 3-152, 1842, p. 110. Il grassetto è nostro.

86 Barré de Saint-Venant A. J. C., “Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues, et sur la nature probable des dernières particules des corps”, *Société Philomatique de Paris*, 3-15, 1844, p. 8. In questa memoria e, soprattutto, in una sua estensione piú tarda e assai meno nota intitolata “De la constitution des atomes” (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, **2**, 417-456, “Complément”, 1-39, 1877-'78), Saint-Venant ha ripreso le argomentazioni di Poisson discutendo approfonditamente le conseguenze della contestata relazione $\mu = -\sigma^0$, in base alla quale le formule d'isotropia (I.4.12-13) divengono

$$\sigma_{11} = \sigma^0 [1 - 2(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})] \approx \frac{\sigma^0}{(1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2}$$

$$\sigma_{23} = 0$$

Queste ultime non solo implicano l'annullarsi di qualsiasi componente di tensione se lo stato iniziale è quello naturale ($\sigma^0 = 0$), ma affermano anche che «un corps composé de matière continue se comporterait *comme un fluide*, et qu'il serait plus analogue aux gaz qu'aux liquides pour la compressibilité. Ce serait même un fluide sans *frottement intérieur*, n'opposant aucune résistance au glissement» (p. 4). Sarebbe dunque inconcepibile l'esistenza di un corpo di materia continua, e l'etere stesso non potrebbe esser tale, infatti, «comme l'a observé Fresnel, si ce fluide était continu, il ne pourrait avoir d'ondes transversales et il serait incapable de transmettre la lumière» (p. 4); un tal corpo non potrebbe inoltre essere stabile di fronte a moti di scorrimento o di torsione «dans lesquels chaque point ira remplacer identiquement un point semblable, exerçant les mêmes actions» (p. 5); inoltre, per l'equilibrio, non potrebbe essere altro «*qu'une sorte d'atmosphère, s'étendant à l'infini, par couches sphériques de densités décroissantes*» (p. 6).

I. 6. L'“errore premiato” di Wertheim.

Pur rimanendo estraneo alla polemica ed evitando di prender partito a favore dell'uno o dell'altro dei due contendenti, anche Cauchy aveva affrontato l'aspetto della conversione delle somme in integrali nei due citati articoli contenuti nel terzo volume degli *Exercices de Mathématiques*. Nella trattazione in essi svolta egli aveva immaginato di suddividere la sfera d'azione della generica molecola M «en éléments très-petits $v, v', v'',$ etc. ..., mais dont chacune renferme encore un très-grand nombre de molécules $m, m', m'',$ etc. ... »⁸⁷; esprimendo le masse dei volumi elementari attraverso i prodotti $v\rho, v'\rho, v''\rho,$ etc. ..., ove ρ è al solito la densità del corpo, egli aveva poi aggiunto che «si la fonction $f(r)$ est telle que, sans altérer sensiblement les sommes G et R [rispettivamente le nostre $\frac{\sigma^0}{\rho}$ e $\frac{\mu}{\rho}$ nel caso discusso d'isotropia], on puisse faire abstraction de celles des molécules $m, m', m'',$... qui sont les plus voisines de la molécule M, les valeurs de G, R, (...) différeront très-peu de celles que déterminent les formules»⁸⁸

$$(I.6.1) \quad G = \frac{1}{2} \rho \sum v r f(r) n_i n_j$$

$$(I.6.2) \quad R = \frac{1}{2} \rho \sum v r^3 \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] n_i n_j n_h n_k$$

quando si estenda la somma a tutti i volumi elementari v, v', v'', \dots .

Sulla base di questa ipotesi, Cauchy converte le somme in integrali dopo esser passato in coordinate polari ed ottiene

$$(I.6.3) \quad G = \frac{2\pi}{3} \rho \int_0^{\infty} r^3 f(r) dr$$

$$(I.6.4) \quad R = \frac{2\pi}{15} \rho \int_0^{\infty} r^5 \frac{d}{dr} \frac{f(r)}{r} dr$$

corrispondenti alle nostre (I.4.16) e (I.4.17) divise per $\rho = \frac{M}{\alpha^3}$. Ora, osserva Cauchy, «si, pour des valeurs croissantes de la distance r , la fonction $f(r)$ décroît plus rapidement que la fraction

⁸⁷ Cauchy A.-L., op. cit., p. 202

⁸⁸ Ibidem, pp. 202-203. Per conservare le nostre notazioni si è posto, rispetto a quelle di Cauchy, $\rho = \Delta$, $n_1 = \cos\alpha$, $n_2 = \cos\beta$, $n_3 = \cos\gamma$, $\frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] = f(r)$.

$\frac{1}{r^4}$, si de plus le produit $r^4 f(r)$ s'évanouit pour $r = 0$, on trouvera, en supposant la fonction $f(r)$ continue et en intégrant par parties (...) $R = -G$ ⁸⁹.

Su questo singolare risultato, che pur lo avrebbe portato di lì a poco a riconoscere le paradossali conseguenze espresse nelle (I.4.12-13) (vale a dire l'uguaglianza delle componenti normali di tensione e l'annullarsi di quelle tangenziali), Cauchy non esprime alcun commento, quasi che le asettiche richieste “matematiche” sulla funzione delle forze $f(r)$ fossero garanzia “fisica” sufficiente per la transitabilità del passaggio discreto-continuo.

Al contrario, preoccupato forse di accordare le formule (I.2.2) con quelle formalmente analoghe

$$(I.6.5) \quad \sigma_{11} = \rho(G + 3R) \varepsilon_{11} + \rho(R - G) (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = (\sigma^0 + 3\mu) \varepsilon_{11} + (\mu - \sigma^0) (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

$$(I.6.6) \quad \sigma_{23} = \rho(G + 3R) \gamma_{23} = (\sigma^0 + 3\mu) \gamma_{23}$$

introdotte «pour plus de commodité»⁹⁰ nel corso dello studio dell'equilibrio del «système de points matériels» soggetto a forze esterne nello stato iniziale, egli si affretta ad osservare che «il suffit de poser»

$$(I.6.7) \quad (R + G) = \frac{1}{2} k \quad (R - G) = K$$

per poter affermare la “coincidenza” tra di esse⁹¹.

È da questa imposizione che nasce il possibile fraintendimento ravvisato fin dall'inizio della nostra discussione e sul quale, dopo la prolungata parentesi precedente, vogliamo ora tornare allacciandoci ai progressi provenienti dal fronte sperimentale attraverso le nuove ricerche di Wertheim. A quest'ultimo si devono, come noto, le prime consistenti esperienze⁹² alle quali si è soliti far risalire l'avvio della controversia sulle costanti elastiche. Secondo quelle esperienze, condotte con prove dirette a trazione per la gomma ed applicando il più attendibile metodo dei cilindri cavi di Regnault per l'ottone ed il vetro, le previsioni della teoria molecolare sul valore invariabile $\nu = 1/4$ del coefficiente di Poisson nei corpi isotropi apparivano decisamente smentite a favore di valori quantitativamente superiori e prossimi ad $1/3$ per le due ultime sostanze. Alla ricerca di una plausibile interpretazione teorica che inscrivesse i suoi risultati in entrambe le formulazioni dell'elasticità dei solidi, Wertheim si

⁸⁹ Ibidem, pp. 203-204.

⁹⁰ Ibidem, p. 204. È importante rimarcare che tali formule introdotte «pour plus de commodité» non rappresentano esattamente le tensioni, mancando nelle componenti normali la costante σ^0 ; le nostre (I.6.5-6) sono inoltre quelle di Cauchy quando ci si ponga nel caso isotropo per il quale è, secondo le notazioni di Cauchy, $L = M = N = 3R$, $P = Q = R$, $H = I = G$.

⁹¹ Ibidem, p. 205.

⁹² Wertheim G., “Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes”, *Annales de chimie et de physique*, III sér., **23**, 52-95, mai 1848.

rifece al duplice repertorio di equazioni in cui Cauchy «avait fait voir comment on peut faire coïncider entre elles les formules obtenues dans ces deux cases, et comment on peut les rendre identiques avec celles de Navier, qui n'en sont qu'un cas particulier»⁹³.

Su queste incerte basi, Wertheim confronta l'espressione della dilatazione cubica Θ (nel caso di semplice trazione secondo l'asse x_1) relativa alle formule continuiste (I.2.2), vale a dire,

$$\Theta = \frac{k}{k + 2K} \varepsilon_{11}$$

con quella rispettosa della «loi de Poisson» $\nu = \frac{1}{4}$

$$\Theta = \frac{1}{2} \varepsilon_{11}$$

e trae la condizione $k = 2K$ già data da Cauchy⁹⁴ per assicurare la corrispondenza tra le due teorie. Rifacendosi poi alle formule molecolari (I.6.5-6) ed alle discusse condizioni di compatibilità (I.6.7), egli osserva che «suivant la théorie de Navier et de Poisson» la condizione $k = 2K$ implica

$$(1.6.8) \quad R + G = R - G.$$

In base a tale singolare conclusione però, «[l]a quantité G devrait être négligeable par rapport à la quantité désignée par R; ce qui entraîne un grand nombre d'hypothèses sur la nature de la fonction $f(r)$, hypothèses suivant lesquelles il deviendrait presque impossible de concevoir le mode d'action de cette force»⁹⁵. Sorprendentemente, quest'erronea deduzione finisce col render più credibile l'alternativa che Wertheim si appresta ad offrire; le sue esperienze mostrano infatti $\nu = \frac{1}{3}$, da cui $\Theta = \frac{1}{3} \varepsilon_{11}$; in questo modo la condizione che assicura la compatibilità delle due teorie diviene $k = K$ e quella che consente l'accordo con le (I.6.7) prende la forma più attendibile

$$(1.6.9) \quad 2(R + G) = R - G$$

e quindi $R = -3G$, ovvero, nelle nostre notazioni, $\mu = -3\sigma^0$; col che le equazioni d'elasticità isotropa di Wertheim assumono la forma uni-costante

⁹³ Ibidem, p. 52.

⁹⁴ Cauchy A.-L., "Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels . . .", op. cit., p. 211.

⁹⁵ Wertheim G., op. cit., p. 78.

$$(I.6.10) \quad \sigma_{11} = k(2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad \sigma_{22} = k(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad \sigma_{33} = k(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + 2\varepsilon_{33})$$

$$(I.6.11) \quad \sigma_{23} = k \varepsilon_{23} \quad \sigma_{31} = k \varepsilon_{31} \quad \sigma_{12} = k \varepsilon_{12} .$$

Con ciò Wertheim coglie i frutti di una mal posta convinzione; non ultimo, quello per cui, trattando l'uguaglianza $\mu = -3\sigma^0$ in base alle (I.4.10-11), si dovrebbe ritenere che «la *force moléculaire* décroît en raison inverse de la *quatorzième puissance* de la *distance*»⁹⁶, ciò che è manifestamente improbabile dato che la scelta $f(r) = r^{-14}$ è incapace di dar conto del mutamento di segno nell'interazione molecolare.

Senza negare l'importanza del ruolo di Wertheim nella ricerca sperimentale dell'Ottocento, sarebbe difficile concordare pienamente col giudizio del tutto riabilitante su di lui emesso da J. F. Bell nella sua monumentale opera sui fondamenti sperimentali della meccanica dei solidi⁹⁷; nella preoccupazione di correggere il consueto e fors'anche iniquo attributo di “sperimentatore non matematico”, ricorrente in letteratura dopo il giudizio espresso da Pearson⁹⁸, e con l'intento di giustificare un probabile pensiero di Wertheim, secondo cui «some new molecular theory might be developed» per quelle sostanze rispondenti a $\nu = \frac{1}{3}$, l'autore sembra totalmente sorvolare sulle ragioni della “svista” sopra discussa; né ci pare obiettivo attribuire al benevolo “Rapport” di Cauchy⁹⁹ sulle ricerche di Wertheim il significato di un'implicita autosconfessione per il fatto che «to Cauchy the atomistic theory was of small moment»¹⁰⁰.

⁹⁶ Ibidem, p. 79. La condizione $\mu = -3\sigma^0$ e, indirettamente, la scelta $f(r) = r^{-14}$ sulla quale Saint-Venant si è espresso severamente nella *Appendice V* al Navier, pp. 686-687, si ritrova anche nel successivo “Mémoire sur la torsion” (*Annales de chimie et de physique*, III sér., **50**, 195-287, giugno 1857, presentato all'Académie des sciences il 19 febbraio 1855); in esso l'autore, pur riconoscendo che le quantità α_j^0 «sont négligeables» rispetto a quelle c_{ijk} «pour l'équilibre du corps dans son état primitif» (pp. 214-215), non ritiene la loro soppressione in accordo con l'esperienza e ripropone, nel caso d'isotropia, l'erronea relazione $\mu = -3\sigma^0$.

⁹⁷ Bell J. F., “The experimental foundations of solid mechanics”, *Handbuch der Physik*, **6 a/I**, *Festkörpermechanik I*, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

⁹⁸ Pearson così si esprime, dopo aver riportato la relazione $\frac{\mu}{E} = \frac{3}{8}$ (ovvero $\lambda = 2\mu$) conseguente alla teoria di Wertheim: «The memoir is very instructive as shewing the dangers into which a physicist may fall who has not thoroughly grasped the step of a mathematical process» (op. cit., **1**, p. 714).

⁹⁹ Cauchy A.-L., “Rapport sur divers Mémoires de M. Wertheim”, *Comptes rendus*, **32**, 326-330, 1851.

¹⁰⁰ Bell J. F., op. cit., p. 247. Benché sia altrettanto insostenibile pretendere di ribaltare la visione ormai consolidata del Cauchy “continuista” a favore del Cauchy “molecolarista”, sembra opportuno richiamare l'attenzione sugli esiti più equilibrati emergenti dalla ricerca storica recente rimandando, in particolare, ai saggi di Grattan-Guinness I., *Convulsions in French Mathematics, 1800-1840. From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics*, Basel, 1990; Belhoste B., *Augustin-Louis Cauchy. A Biography*, New York, 1991; Benvenuto E., *An Introduction to the History of Structural Mechanics*, New York, 1991, Dahan Dalmedico A., *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'École Française*, Paris, 1992. Non mancano, peraltro, valide ragioni per rivedere il giudizio sopraportato: **1**) nel menzionato “Rapport” Cauchy è

I. 7 . Nuovi spunti risolutivi in Clausius.

Riconoscendo inammissibile la relazione $\mu = -3\sigma^0$ introdotta da Wertheim, Clausius¹⁰¹ ne colse la viziata origine nelle formule (I.6.5), le quali «sind gar nicht als die wahren Werthe der Spannungen zu betrachten» per l'assenza della costante σ^0 , presente invece nella espressione corretta

$$(I.71) \quad \sigma_{11} = \rho G + \rho(G + 3R) \varepsilon_{11} + \rho(G - R) (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

ancora una volta ambiguo quando afferma che «[s]i l'on considère un corps solide et homogène comme un système de points matériels» e, in più, si assume tale sistema «isotrope» (p. 327), nelle equazioni d'equilibrio o di movimento i coefficienti «se réduisent a deux»; infatti, o ammette l'esistenza di due coefficienti *elastici* distinti, ciò che è smentito dalla sua stessa teoria molecolare ed è invece ipotizzato nella versione continuista, oppure comprende fra i coefficienti l'autotensione σ^0 , ciò che sembra doversi intendere in questo contesto. A questo punto diviene però risolutiva la «seule objection grave» mossa dall'autore alla conclusione $\theta = \frac{k}{K} = 1$ di Wertheim, e cioè che, «si le rapport θ se réduit effectivement à l'unité, cette réduction doit subsister, quand la pression extérieure, dont ce rapport est supposé indépendant, s'évanouit. Or, les formules générales qui ont été données, comme propres à représenter les composantes de pressions supportées dans l'état d'équilibre par un plan quelconque, ne fournissent des pressions nulles que dans le cas où l'on suppose $\theta = 2$ » (p. 328). Questa conclusione discende dal fatto che le formule (complete) date da Cauchy (*Ex. Math.* 3, 1828, p. 231), vale a dire

$$\sigma_{11} = \frac{k - 2K}{4} + k \varepsilon_{11} + K (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (\text{e analoghe}) \quad \sigma_{23} = k \varepsilon_{23} \quad (\text{e analoghe}),$$

mostrano che, «quand la pression extérieure s'évanouit», cioè quando il corpo è nello stato naturale, le tensioni sono nulle solo per $k = 2K$. Con ciò la relazione di Wertheim $k = K$, (e quindi anche il valore $\nu = \frac{1}{3}$), è riconosciuta teoricamente insostenibile dallo stesso Cauchy nell'ambito della teoria molecolare. Una possibile via d'uscita dalla difficoltà connessa a tale obiezione, difficoltà che riconosciamo dipendere dal forzato raffronto di formule inconciliabili, è intravista da Cauchy nel superamento dell'ipotesi che vede ogni molecola «réduite à un seul point. Si l'on suppose, au contraire, chaque molécule composée de plusieurs atomes, alors, suivant la remarque faite (...) dès l'année 1839, les coefficients compris dans les équations du mouvements vibratoires cesseront d'être des quantités constantes, et deviendront, par exemple, si le corps est un cristal, des fonctions périodiques des coordonnées (...)» (p. 329); **2**) È noto l'incompiuto proposito di Cauchy, espresso nella comunicazione “Mécanique moléculaire” (*Comptes rendus*, 28, I sem., 2-6, 1849), di raccogliere in un *Traité de mécanique* «les recherches entreprises et poursuivies depuis une trentaine d'années sur la mécanique moléculaire et sur la physique mathématique» ed è certamente difficile credere che, fra queste ricerche, quelle connesse allo studio dei sistemi discreti di particelle dovessero avere un ruolo secondario: basti pensare all'assiduità con la quale Cauchy si è occupato, in parallelo all'elasticità dei solidi, della teoria della luce, riportando le sue ricerche negli *Exercices de Mathématiques* (1830), nei primi due volumi degli *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique* (1840-'41) e nelle innumerevoli note e comunicazioni sui *Comptes rendus* degli anni '40; **3**) Infine, benché sia assai raro trovare un'esplicita presa di posizione negli scritti di Cauchy, ci si è imbattuti in una breve e tarda nota presentata all'Académie des Sciences nella seduta del 23 gennaio 1854 e pubblicata col titolo “Points associés. Rayons vecteurs associés. Avantages de leur emploi dans les problèmes de physique mathématique” (*L'Institut, Journal universel des sciences et des société savantes en France et a l'étranger*, 22, 29-30, 1854), nella quale l'autore ammette che fra le due «méthodes différentes» dalle quali «on peut établir les équations d'équilibre ou de mouvement que présente la mécanique moléculaire, (...) celle qui paraît la plus rigoureuse consiste à considérer les corps comme des systèmes de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle», l'altro metodo essendo quello che «opère comme si les corps étaient des masses continues» (p. 29).

101 Clausius R., “Ueber die Veränderungen, welche in den bisher gebräulichen Formeln für das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer fester Körper durch neuere Beobachtungen nothwendig geworden sind”, *Annalen der Physik und Chemie*, 76, 46-67, 1849.

riportata da Cauchy nello studio successivo a quello prima ripercorso¹⁰² ed identica alla nostra (I.4.12) quando si ponga $G = \frac{\sigma^0}{\rho}$ e $R = \frac{\mu}{\rho}$. In essa si lascia finalmente riconoscere il vero significato della costante $\rho G = \sigma^0$: «[s]etzt man nämlich in diesen Formeln alle Differentialgleichungen $\frac{d\xi}{dx} [\epsilon_{11}]$ etc. gleich Null, so erhält man die Spannungen, welche in dem Körper schon während seines ursprünglichen Zustandes stattfanden»¹⁰³; se allora, come sottinteso nelle esperienze di Wertheim, si prescinde dall'effetto della pressione atmosferica, la relazione $\mu = -3\sigma^0$ perde significato. Con ciò la difficoltà di accordare la formulazione molecolare coi risultati di quelle esperienze torna a proporsi in tutta la sua problematicità; proprio su questo punto vertono le “necessarie modifiche delle formule finora in uso” alle quali allude il titolo dell'articolo.

In vero, l'urgenza segnalata da Clausius di ricorrere a relazioni d'isotropia bi-costanti (per la sola elasticità statica) è fondamentalmente errata perché riflette il tentativo di interpretare l'allora poco noto fenomeno della *elastische Nachwirkung* nell'ambito di una formulazione lineare. Più interessante, semmai, è la giustificazione addotta per una tale revisione: richiamandosi esplicitamente all'idea di Poisson sulla dipendenza delle forze molecolari dalla direzione nel caso dei corpi cristallizzati, Clausius ammette infatti che, quando un cristallo è soggetto a forze esterne operanti con diverse intensità sui suoi lati, le molecole possono ruotare oltre che traslare. A tali rotazioni molecolari, susseguenti l'istantanea deformazione, sarebbe dunque da ascrivere l'effetto elastico ritardato e il conseguente rifiuto delle formule uni-costanti, dedotte mettendo in conto l'esistenza delle sole traslazioni; occorre sottolineare che questa idea, per quanto balzana ed emergente in un contesto improprio, sarà recuperata con nuova consapevolezza da Voigt¹⁰⁴ col proposito non dissimile di superare i limiti dell'originaria teoria.

Il nostro interesse per la memoria di Clausius è però altrove, in quelle parti, cioè, in cui egli, ripercorrendo criticamente gli aspetti più discutibili delle teorie di Cauchy e di Poisson, svolge alcune nuove e forse risolutive considerazioni sul problema della conversione delle somme in integrali, aprendo contemporaneamente un diverso orizzonte metodologico per intendere il “passaggio di scala” fra l'impostazione molecolare (microscopica) e quella fenomenologica (macroscopica) dell'elasticità dei solidi.

Una prima critica è rivolta al modo in cui Cauchy aveva ridotto il numero delle somme esprimenti le autotensioni e le costanti elastiche attraverso opportune ipotesi sulla

102 Cauchy A., “De la pression ...”, p. 230.

103 Clausius R., op. cit., p. 50.

104 Voigt W., “Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle”, *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, **34**, 3-100, 1887.

distribuzione delle molecole; nel caso d'isotropia, ad esempio, esse dovrebbero essere disposte allo stesso modo rispetto a qualunque terna di assi ortogonali. Secondo Clausius però, «[e]ine so vollkommen regelmässige Anordnung der Moleküle» non è presumibile nei corpi isotropi, i quali sarebbero invece formati da minuti frammenti cristallini disposti in ogni punto secondo tutte le possibili orientazioni, in modo che il loro assemblaggio non riveli direzioni particolari nella risposta elastica¹⁰⁵.

Discutendo poi la prima memoria di Poisson, le critiche si appuntano sul suo trattamento delle somme (I.4.14-15) relative alle molecole prossime a quella centrale. Si è visto in precedenza che Poisson aveva convertito le somme in integrali rispetto ai soli angoli in base alla supposizione che, per la piccolezza dell'intervallo molecolare in confronto al raggio d'attività, le molecole poste entro un volume elementare di ogni strato di spessore infinitesimo in cui può suddividersi la sfera d'azione della molecola centrale, esercitino su quest'ultima azioni pressoché uguali, in modo da render lecito considerare collettivamente le molecole entro uno stesso volume anziché metterle in conto singolarmente. Tali ragioni però, osserva Clausius, vengono meno non appena r è confrontabile con l'intervallo molecolare. In questo caso, infatti, uno strato descritto intorno alla molecola centrale contiene pochissime particelle e due di queste, vicine fra loro, sono “viste” da quella centrale in direzioni così diverse che la loro azione su di essa non può ritenersi uguale, di modo che l'integrazione estesa a tale strato darebbe un risultato diverso dalla somma. Per aggirare questa difficoltà, Poisson aveva ipotizzato che la funzione delle forze $f(r)$ fosse tale da rendere trascurabili le azioni delle poche molecole più vicine rispetto a quelle delle molte più distanti. Clausius però osserva ragionevolmente che nulla autorizza una tale ipotesi; in effetti, egli rimarca, si potrebbe con altrettanta probabilità ritenere che la forza scambiata tra due molecole cresca in modo sensibile col loro avvicinarsi, da operare più efficacemente per una molecola vicina che per molte lontane prese assieme. A sfavore dell'ipotesi di Poisson giocherebbe inoltre il paradosso $\mu = -\sigma_0$ connesso all'ulteriore integrazione rispetto alle distanze, di fronte al quale la necessità di conservare le somme non è vista da Clausius come risolutiva.

In realtà, la via per superare queste contraddizioni va probabilmente ricercata in un differente approccio metodologico del quale Clausius sembra aver profondamente inteso le ragioni; esso si basa sul riconoscimento che la valutazione delle proprietà fisiche e meccaniche della materia non potrà mai scendere al livello dei suoi costituenti ultimi, ma rimarrà sempre legata ad una descrizione macroscopica dei fenomeni disvelante il comportamento “in media” di una quantità innumerevole di individui cristallini. L'appello di Clausius ad un *Normalsystem* che rappresenti lo stato medio di un grandissimo numero di sistemi molecolari esprime esattamente questa circostanza; sotto tale profilo, la stessa

105 Clausius R., op. cit., pp. 52-53.

definizione “molecolarista” di tensione andrebbe ricondotta al valore medio desumibile dalla contemporanea messa in conto di un numero imprecisato di piú sistemi singoli. Questo riconoscimento sembra particolarmente importante, poiché riflette in maniera netta il reale significato dell'alternativa fra l'approccio continuista e quello molecolare: non una semplice differenza *formale*, connessa a due distinti modelli rappresentativi della stessa realtà, ma una piú profonda differenza *materiale* per la diversa natura delle “realtà” rappresentate.

Con riferimento al *Normalsystem*, è prevedibile che le contraddizioni sopraindicate possano essere rimosse; nel caso dei corpi isotropi, ad esempio, quand'anche le molecole dei singoli gruppi cristallini esercitino azioni variabili con la direzione, il ricorso al sistema normale richiede l'introduzione di una forza media uniforme; analogamente, la difficoltà che aveva indotto Poisson a trascurare le molecole degli strati piú vicini alla particella centrale viene meno, perché, anche se ogni strato di ciascun sistema singolo contiene un numero di molecole tale per cui non si può pensare ad una distribuzione uniforme su tutta la sua estensione, è sempre possibile, per la diversa collocazione delle molecole nei diversi sistemi, ottenere come valore medio un'uguale frazione di molecola per ogni volume elementare dello strato e quindi un'azione uniforme su tutta la sua estensione. In questo modo, conclude Clausius, la conversione delle somme in integrali può estendersi a tutto il volume, senza la necessità di imporre ipotesi restrittive sulla funzione $f(r)$; l'unica precauzione sta nell'assumere un limite inferiore d'integrazione diverso da zero.

Queste indicazioni, lasciate da Clausius a livello di enunciato, saranno in seguito fatte proprie da Saint-Venant quale riprova delle convinzioni già espresse sulla natura discreta della materia. Riprendendo le formule di Poisson

$$(1.7.2) \quad \sigma^0 = \frac{2\pi}{3} \frac{mM}{\alpha^6} \int_{\alpha}^R r^3 f(r) dr$$

$$(1.7.3) \quad \mu = \frac{2\pi}{15} \frac{mM}{\alpha^6} \int_{\alpha}^R r^5 \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{r} \right] dr = \frac{2\pi}{15} \rho^2 \left\{ \left[r^4 f(r) \right]_{\alpha}^R - \int_{\alpha}^R 5r^3 f(r) dr \right\} = - \sigma^0$$

nelle quali è conservato come limite inferiore d'integrazione l'intervallo molecolare α (e, come limite superiore, un valore R della distanza per il quale $f(r)$ risulta insensibile), Saint-Venant ritorna sull'uguaglianza $\mu = \left\{ R^4 f(R) - \alpha^4 f(\alpha) \right\} - \sigma^0$, osservando che «[l]e premier terme entre parenthèses est nul puisque $f(r)$ devient tout à fait insensible avant que α ne soit grande, et le deuxième est nul aussi pour la limite inférieure $\alpha = 0$ à moins qu'il n'y ait des répulsions infinies du quatrième ordre au contact, et que ce ne soient ces répulsions-là qui seules déterminent la valeur de μ lorsque la pression primitive σ^0 est nulle; ce qui exclurait toute élasticité»¹⁰⁶.

¹⁰⁶ *Résumé des Leçons (...) par Navier, avec des Notes et des Appendices par M. Barré de Saint-Venant, Paris, 1864*^{III}, *Historique abrégé ...*, p. clxij.

Non sarebbe quindi nella conversione delle somme in integrali che si alligna il pericolo di false conseguenze; «c'est, comme l'a très-bien remarqué M. Clausius, dans la supposition que la limite inférieure de l'intégration pour les distances soit zéro. Dès qu'on prend une limite inférieure finie, si petite qu'elle soit, qui sauvegarde la non-contiguïté des dernières parties, rien n'empêche d'intégrer si cela est commode pour obtenir des résultats d'une certaine forme; car si une intégrale ne peut guère être substituée à une somme particulière relative aux diverses molécules qui en entourent une seule, elle peut très-bien l'être à une *moyenne* d'un très-grand nombre de pareilles sommes, vu la compensation qui s'opère alors entre les inégalités ou irrégularités individuelles; et cette moyenne est, après tout, seule à considerer dans les applications, comme dit le même savant (...). De là aussi la possibilité, malgré quelques objections de Poisson, de continuer de se servir, dans ces sortes de recherches, comme font encore les géomètres anglais et allemands, des méthodes de la mécanique analytique de Lagrange»¹⁰⁷.

107 Ibidem, p. clxiv. Le considerazioni sul paradosso conseguente alla conversione delle somme in integrali sono ribadite senza sostanziali variazioni da Saint-Venant nella già citata memoria "De la constitution des atomes" (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 2, 417-456, 1877-'78; Complément, 1-39); in questa occasione, l'autore propone anche una plausibile funzione delle forze

$$f(r) = 4 p \left(\frac{r_0^2}{r^2} - \frac{r_0^4}{r^4} \right),$$

ove r_0 è il valore di r per cui si ha equilibrio ($f(r_0) = 0$) e p è il massimo valore positivo di $f(r)$; con questa scelta si ha

$$[r^4 f(r)]_0^R = \{R^4 f(R) - \alpha^4 f(\alpha)\} = 4 p r_0^2 (R^2 - \alpha^2),$$

e poiché R è un multiplo elevato di α (in genere tutti gli autori assumono infinito per estremo superiore), la quantità $r_0^2 (R^2 - \alpha^2)$ è estremamente grande (al limite infinito per $R \rightarrow \infty$). Tale risultato è però indipendente da α , nel senso che, anche per $\alpha = 0$, il paradosso $\sigma^0 = -\mu$ non sussiste. Le stesse osservazioni si estendono alla formula proposta da Berthot ("Sur les effets des forces mutuelles", *Comptes rendus*, 98, I sem., 5-7, 1884), il quale assume

$$f(r) = K m m' \frac{r_0 - r}{r^2},$$

ove m e m' sono le masse delle particelle e K un fattore di proporzionalità; anche in questo caso infatti, si trova $\{R^4 f(R) - \alpha^4 f(\alpha)\} = R(r_0 - R) - \alpha(r_0 - \alpha)$, quantità che tende a $-\infty$ per R tendente a ∞ , indipendentemente dalla scelta di α . In seguito, lo stesso Saint-Venant ("Remarques relatives à la Note de M. Berthot sur les actions mutuelles entre les molécules des corps", *Comptes Rendus*, 99, II sem., 5-7, 1884) è tornato sull'argomento domandandosi se questi tipi di curve, «que Boscovich a été le premier à proposer (mais en multipliant trop les intersections avec l'axe des distances) représentent-elles bien les actions telles qu'elles sont et s'exercent? Cela est peu probable. M. Berthot lui-même (...) ne présente la sienne que comme purement empirique; et y aura longtemps là-dessus bien des choses ignorées, de la connaissance desquelles, heureusement, on se passe aujourd'hui dans l'établissement des formules de l'élasticité, de l'hydraulique interne et même de l'électricité, chose encore plus mystérieuse dans son essence. Mais, en attendant, les recherches et conjectures du genre de celles qui ont ainsi occupé Poisson, Poncelet, et M. Berthot, après Newton (Optique), Gourn Knigt (cité par Robison pour les répulsion introduites), peuvent être toujours bonnes à poursuivre comme capables des fournir des possibilités d'explications et quelques aperçus utiles». Val peraltro la pena osservare che, per quanto ormai totalmente estranei alle problematiche qui discusse, anche i fisici moderni suggeriscono potenziali empirici per i quali la condizione $[r^4 f(r)]_0^\infty = 0$ non è matematicamente soddisfatta; ad esempio, se si assume $\phi(r) = -\frac{c}{r} + \frac{b}{r^n}$

per il potenziale delle forze, si trova $f(r) = \frac{d\phi}{dr} = \frac{c}{r^2} + \frac{nb}{r^{n+1}}$ da cui $[r^4 f(r)]_0^\infty = [cr^2 - \frac{nb}{r^{n-3}}]_0^\infty$, quantità tendente a infinito per i valori di n sperimentalmente attendibili (n può variare tra 9 e 15).

CAP. II. - IL GRANDE DIBATTITO OTTOCENTESCO.

II. 1. In nome del “grand principle”.

Nella sua moderna riscrittura della *Continuum Mechanics*, Truesdell¹⁰⁸ distingue due possibili metodi per intendere il concetto di elasticità: l'uno, attribuito a Cauchy, per il quale un corpo si dice elastico quando la tensione è espressa in funzione della deformazione; l'altro, facente capo a Green, in base al quale un corpo è definito elastico quando è la sua energia interna ad esser data in termini della deformazione. Benché il riferimento ad un qualsiasi approccio molecolare sia volutamente estraneo agli interessi dell'autore¹⁰⁹, questa distinzione è perfettamente compatibile con l'originaria formulazione dell'elasticità in termini molecolari; anzi, non sarebbe forse inesatto sostenere, quanto meno da un punto di vista storico, che essa si applichi piú propriamente rispetto a una tale formulazione.

In effetti, allorquando Green¹¹⁰ gettò le basi dell'impostazione energetica dell'elasticità in nome del “grand principle”, come Thomson e Tait¹¹¹ ebbero a chiamare alcuni anni dopo il principio di conservazione dell'energia, punto di partenza furono le critiche alla «rather restrictive supposition» in base alla quale Cauchy aveva ritenuto l'azione fra due molecole diretta secondo la loro congiungente e funzione unicamente della loro distanza; non quindi il rifiuto *tout court* del modello molecolare a favore dell'ipotesi continuista, ma, piú semplicemente, una “sospensione di giudizio” sulle modalità d'azione fra gli elementi ultimi della materia.

Questo atteggiamento non è nuovo nello sviluppo del pensiero scientifico: esso riflette in maniera sorprendente, per quanto inconsapevole, la posizione “epistemologica” assunta quasi un secolo prima da Jacopo Riccati¹¹² di fronte agli alternativi sistemi di Cartesio,

108 Truesdell C., *Continuum Mechanics I. The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, The international science review series, **8**, New York-London-Paris, 1966, p. 52.

109 Il pensiero di Truesdell è chiaramente espresso nell'Appendix 1 dell'opera prima citata: «I hope that what little I can present (...) will encourage the reader to question the all too common assumption that because physical matter is composed of molecules, a theory based on the crudest and most unrealistic molecular hypothesis is automatically preferable to any continuum theory. Indeed, I contend that gross phenomena are most naturally, accurately, and elegantly represented by gross hypotheses alone» (p. 189).

110 Green G., “On the Laws of Reflection and Refraction of Light at the common Surface of Two Non-crystallized Media”, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **7**, (1838-1842), 1-24, 1839; letto l'11 dicembre 1837: “Supplement to a memoir on the Reflexion and Refraction of Light”, *Idem*, 113-120, 1839; letto il 6 maggio 1839. Anche in G. Green, *Mathematical and Physical Papers of the late George Green*, 243-269; 281-290, London, 1871.

111 Thomson W. , Tait P. G., *Treatise on Natural Philosophy*, **1**, Oxford, 1867, p. vi.

112 Riccati J., *Saggio intorno il Sistema dell'Universo, Opere*, Lucca, 1761.

Newton e Leibniz: anziché attribuire alla «materia sottile» del primo, alle «attrazioni e repulsioni a distanza» del secondo, alle «monadi» dell'ultimo, lo statuto di *nozioni di cose* assegnando loro una reale consistenza fisica, lo scienziato trevigiano propendette per inscrivere fra quelle *nozioni di metodo* utili a «render conto delle proprietà esterne», vale a dire, a descrivere il comportamento materiale da un punto di vista fenomenologico. Non sorprende allora che, ricercando una legge universale d'ordine matematico che prescindesse da qualsiasi rappresentazione mentale della costituzione della materia, Riccati abbia ricondotto la «virtù elastica» dei corpi al «perpetuo, e non interrotto passaggio delle forze vive in morte, e di morte in vive», vale a dire, a quell'incontestato principio di conservazione dell'energia preso a riferimento con analogo proposito dallo stesso Green.

Abbandonata dunque ogni presunzione conoscitiva sulla natura dell'ente materiale, il principio “necessitante” assunto da Green «as the basis of the reasoning» si traduce nell'affermare che «in whatever way the elements of any material system may act upon each other, if all the internal forces exerted be multiplied by the elements of their respective directions, the total sum for any assigned portion of the mass will always be the exact differential of some function»¹¹³. Le conseguenze tratte da Green su questa base sono ben note: riconosciuta quella certa funzione, espressiva del lavoro interno, dipendente dalle sei componenti della deformazione, cioè $\Phi = F(\epsilon_{ij})$; supposte queste ultime infinitesime del primo ordine; sviluppata la Φ in una serie $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots$ nelle potenze intere delle ϵ_{ij} ; assunto d'equilibrio lo stato iniziale, ciò che dà $\Phi_1 = 0$, e trascurati i termini d'ordine superiore al secondo, il lavoro interno si riduce, a parte il termine costante Φ_0 , ad una funzione Φ_2 quadratica nelle componenti di deformazione e, come tale, contenente nel caso generale 21 distinti coefficienti.

L'economia di pensiero, nel senso di Mach, realizzata in questi pochi passaggi è veramente ammirevole e costituisce una parte forse non secondaria del riconoscimento da subito attribuito al “metodo di Green”, assieme al fatto che esso si inquadra entro la rigorosa fondazione termodinamica dei fenomeni elastici formulata da Thomson nel 1855¹¹⁴. In

113 Green G., op. cit., p. 245.

114 Thomson W., “On the thermo-elastic and thermo-magnetic properties of matter”, *Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, **1**, 57-77, 1857. Ad esempio, se $\delta\Phi$ indica l'incremento di energia interna per unità di volume acquisito nell'intervallo di tempo δt , δL il lavoro svolto dalle forze esterne nel medesimo intervallo e δQ l'equivalente meccanico del calore scambiato nello stesso tempo, il primo principio della

Termodinamica fornisce $\int_V \delta\Phi dV = \delta L + \delta Q$. Poiché si ha $\delta L = \int_V \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij} dV$, esso può risciversi

$$\int_V \delta\Phi dV = \delta Q + \int_V \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij} dV .$$

Dal secondo principio della Termodinamica nel caso di una trasformazione adiabatica ($\delta Q = 0$), si ha

quest'ultimo testo è infatti palese la predilezione tipicamente anglosassone per l'impostazione energetica, e il futuro Lord Kelvin non tralascia di ribadire la sua indiscutibile superiorità tratteggiando in poche righe il quadro della situazione. Di fronte alle vecchie pretese dei «many mathematicians and experimenters» che avevano cercato di dimostrare l'esistenza di ulteriori relazioni fra i 21 coefficienti di Green, egli snocciola le opposte convinzioni dei maggiori scienziati inglesi, forte delle certezze calanti dalla nuova formulazione: «thus it has been shown, first I believe by Mr. Stokes, that the relation which the earlier writers supposed to exist between rigidity and resistance to compression, is not verified, because experiments on the torsion of wires of various metals, rods of india-rubber, &c., indicate, on the whole, less rigidity than would be expected, according to that relation». Non solo: «from some experiments, communicated to me by Mr. Maxwell, which he has made on iron wire by flexure and torsion, it appears highly probable that iron is more rigid in proportion to its resistance to compression than M. Wertheim's experiments on brass and glass show these to be». Infine, «this is, as Mr. Maxwell remarks, (...) just as is to be expected from Rankine's theory; according to which, thermal motions among the particles of matter cause the discrepance which actual bodies exhibit from the relation which the earlier theorists arrived at»¹¹⁵.

La ripetuta allusione ai “primi autori” potrebbe far pensare ad un ormai riconosciuto superamento della vecchia impostazione “alla francese”, in nome di un'univoca adesione alle conseguenze del nuovo “metodo di Green”; lo stesso Thomson peraltro, si riprometteva di mostrare il fallimento dell'originario modello molecolare nella convinzione che, «[w]hether or not it may be true that such relations do hold for natural crystals, it is quite certain (as I intend to show in a communication to the Royal Society of Edinburgh before the end of the

$$\delta\Phi = \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} ,$$

vale a dire che il secondo membro è il differenziale esatto della funzione Φ rappresentativa dell'energia interna, per cui $\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$. In particolare, Thomson sviluppa la funzione Φ nelle sue variabili ε_{ij} , cioè

$$\Phi = \sum_{ij} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_0 \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{ijhk} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{hk}}\right)_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk} ,$$

e perviene alle espressioni delle componenti di tensione

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{hk}}\right)_0 \varepsilon_{hk} = \sigma_{ij}^0 + C_{ijhk} \varepsilon_{hk} .$$

L'esistenza di una funzione Φ , rappresentativa dell'energia interna, per la quale $\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$, è dimostrata anche per trasformazioni isoterme.

115 Ibidem, pp. 70-71.

present session) that an arrangement of actual pieces of matter may be made (...) which shall have an arbitrarily prescribed value for each one of these twenty-one coefficients»¹¹⁶.

Contro ogni plausibile previsione, la prospettiva additata dallo scienziato scozzese doveva però attendere ancora a lungo. A trent'anni di distanza, quando finalmente il promesso modello meccanico venne presentato in occasione delle celebri *Baltimore Lectures* del 1884¹¹⁷, la “controversia sulle costanti” era tutt'altro che sopita e solo due anni dopo i suoi echi dovevano riverberarsi sonori nelle pagine della *History* dedicate da Pearson alla *querelle* fra “rari-costanti” e “multi-costanti”: fra questi ultimi, Thomson si trovava sul banco degli imputati e il suo modello meccanico era l'oggetto di una implacabile critica.

II. 2. Stokes e la “perfetta solidità” della teoria molecolare.

Nel passo di Thomson prima riportato, il nome di Stokes compare fra gli autori citati a sostegno delle conseguenze deducibili dal “metodo di Green”. In realtà però, la via seguita dall'illustre professore di Cambridge per giustificare le nuove formule bi-costanti per i solidi isotropi non discende dall'impostazione energetica, ma trae origine dall'interesse maturato nel campo dell'idrodinamica. Dall'indagine sul moto dei fluidi¹¹⁸, Stokes era giunto a riconoscere che le velocità delle molecole di un qualunque elemento fluido si riducono, a parte una componente traslatoria e una rotatoria comune a tutte, a tre velocità relative principali dirette secondo gli assi di un riferimento ortogonale, ciascuna delle quali risultante dalla composizione di una velocità di dilatazione media eguale in tutte le direzioni e di «*motions of shifting*» non alteranti la densità e consistenti in movimenti eguali due a due, di segno contrario e perpendicolari uno all'altro; tradotto al caso dei solidi, ciascuna delle dilatazioni principali verrebbe a scriversi, ricordando che $\Theta = \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III}$,

$$\epsilon_I = \frac{\Theta}{3} + \frac{\epsilon_I - \epsilon_{II}}{3} - \frac{\epsilon_{III} - \epsilon_I}{3} \quad \epsilon_{II} = \frac{\Theta}{3} + \frac{\epsilon_{II} - \epsilon_{III}}{3} - \frac{\epsilon_I - \epsilon_{II}}{3} \quad \epsilon_{III} = \frac{\Theta}{3} + \frac{\epsilon_{III} - \epsilon_I}{3} - \frac{\epsilon_{II} - \epsilon_{III}}{3}$$

In questo modo, il movimento di “shifting” perpendicolare, ad esempio, alla direzione I, consiste nelle due dilatazioni uguali e di segno opposto $\frac{\epsilon_{II} - \epsilon_{III}}{3}$ e $-\frac{\epsilon_{II} - \epsilon_{III}}{3}$ secondo le direzioni II e III rispettivamente, le quali non alterano il volume dell'elemento.

116 Ibidem, pp. 69-70.

117 Thomson W., *Baltimore Lectures on molecular dynamics and the wave theory of light*, London, 1904. Apparse inizialmente come *Notes of Lectures on molecular dynamics and the theory of light. Delevered at the Johns Hopkins University, Baltimore. Stenographically reported by A. S. Hathaway*, Baltimore, 1884.

118 Stokes G. G., “On the theories of internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids”, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8, 287-319, 1847; letto il 14 aprile 1845. Anche in G.G.Stokes, *Mathematical and physical papers*, 1, 75-129, 1880.

Il significato della nuova scrittura delle componenti principali della dilatazione è tutt'altro che formale; distinguendo nel comportamento materiale due tipi di elasticità, «one by which a body which is uniformly compressed tends to regain its original volume, the other, by which a body which is constrained in a manner independent of compression tends to assume its original form»¹¹⁹, Stokes associa infatti la parte idrostatica della deformazione ad un primo coefficiente A di compressibilità, quella connessa alle componenti di “shifting” ad un secondo coefficiente B (corrispondente al modulo d'elasticità tangenziale) ed ammette che il rapporto fra i due possa variare senza soluzione di continuità da un valore superiore infinito, proprio dei fluidi in quiete, ad un valore inferiore pari a 5, esprimente la “perfetta solidità” ascrivibile ai corpi trattati dalla teoria molecolare: le formule

$$(II.2.1a) \quad \sigma_{11} = A \frac{\Theta}{3} + 2B \left(\epsilon_{11} - \frac{\Theta}{3} \right)$$

$$(II.2.1b) \quad \sigma_{23} = 2B \epsilon_{23}$$

al variare del rapporto A/B, si applicherebbero quindi tanto ai gas quanto ai corpi isotropi più rigidi, venendo meno una definita linea di demarcazione fra lo stato gassoso e quello solido della materia¹²⁰.

La ragione di fondo delle nuove formule bi-costanti va rintracciata nella convinzione di Stokes secondo la quale le proprietà elastiche e quelle plastiche convivrebbero in ogni sostanza, seppur in gradi diversi. «On the whole» osserva l'autore, «it is probable that the greater the plasticity of a substance the less its elasticity, and *vice versa*, although this rule is probably far from being without exception. When the plasticity of the substance is still further increased, and its elasticity diminished, it passes in a viscous fluid»¹²¹. Sotto questo profilo, la stessa distinzione pratica fra lo stato solido e quello viscoso sembra in realtà dipendere esclusivamente dall'intensità della forza gravitazionale rispetto alla coesione materiale, per cui ciò che sulla terra ha consistenza solida si comporterebbe come un fluido viscoso se portato sul sole e mantenuto alla stessa temperatura, e, viceversa, un fluido viscoso sulla terra assumerebbe l'aspetto di un solido sulla superficie di un piccolo pianeta come

119 Ibidem, pp. 125-126.

120 Stokes trae le formule (II.2.2a-b) direttamente da quelle analoghe stabilite per i fluidi in moto, e cioè

$$\sigma_{11} = p - 2\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\Theta}{3} \right) \quad \sigma_{23} = -\mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)$$

ove v_1, v_2, v_3 sono le velocità nel punto P considerato, di coordinate x_1, x_2, x_3 , e p è la pressione che esisterebbe in P se le molecole ad esso prossime fossero in uno stato di equilibrio relativo (o se il fluido fosse nello stato di quiete): nel passaggio ai solidi, la pressione p si traduce nello sforzo $A \frac{\Theta}{3}$ corrispondente ad una dilatazione uniforme $\frac{\Theta}{3}$ quando il solido è in equilibrio.

121 Stokes G. G., op. cit., p. 126.

Pallade. Allo stesso modo, «[t]he gradation of viscous, into what are called perfect fluids seems to present as little abruptness as that of solids into viscous fluids; and some experiments which have been made on the sudden conversion of water and ether into vapour (...) go towards breaking down the distinction between liquids and gases»¹²². In sostanza, dunque, mentre le proprietà elastiche sarebbero le sole chiamate in causa nelle dilatazioni uniformi, le qualità plastiche si manifesterebbero nelle deformazioni di “shifting”: «[i]t is natural then to expect to find the ratio of A to B greater than 5, approaching more nearly to 5 as the solid considered is more hard and brittle, but differing materially from 5 for the softer solids, especially such as India rubber, or, to take an extreme case, jelly. According to this view the relation $A = 5B$ belongs only to an ideal elastic solid, of which the solidity, or whatever we please to call the property considered, is absolutely perfect»¹²³.

Questa suggestiva linea di pensiero, nella quale sembra riflettersi la convinzione per la quale “natura non facit saltus”, diverrà ben presto dominante nella letteratura anglosassone e ad essa si richiamerà successivamente anche Voigt¹²⁴ in una nuova interpretazione molecolare dell'isotropia bi-costante dei solidi non cristallini, riproponendo l'idea di Stokes sulla base di una piú generale cinematica della deformazione.

A quest'ultimo riguardo, l'approccio di Stokes non differisce dalla tradizione: sottintesa l'ipotesi che l'azione fra due molecole operi secondo la congiungente dei loro centri e dipenda unicamente dalla distanza fra questi, Stokes esprime nell'usuale approssimazione al primo ordine $\Delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j$ la variazione dello spostamento¹²⁵ e, pur senza passare dalla definizione di tensione “alla francese”, perviene alla linearità delle formule (II.2.2a-b) sulla base del principio fisico dell'isocronismo delle piccole oscillazioni. Su tali premesse però, la trattazione svolta in precedenza (paragrafo I.4.) seguendo Cauchy, mostra necessariamente l'esistenza della relazione $A = 5B$ fra i coefficienti elastici: dove ricercare, dunque, l'origine di questa singolare discrepanza di risultati ?

È lo stesso Stokes a ritenere d'averne riconosciuto la causa, osservando che «there is one hypothesis made in the common theory of elastic solids, the truth of which appears to me very questionable»¹²⁶. L'ipotesi alla quale allude l'autore è quella stessa introdotta da Poisson

122 Ibidem, p. 126.

123 Ibidem, pp. 120-121.

124 Voigt W., “Ueber das numerische Verhältnis der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien nach der molecularen Theorie”, *Annalen der Physik*, IV Folge., **4**, 187-196, 1901.

125 Stokes riporta l'espressione $\Delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j$ con riferimento alle velocità (p. 80).

126 Stokes G. G., op. cit., p. 120.

sulla funzione delle forze, al fine di trascurare la parte irregolare dell'azione delle molecole situate nelle immediate vicinanze di quella considerata rispetto all'azione complessiva e regolare di quelle più distanti. In realtà, si è già avuto modo di riscontrare l'ininfluenza di tale assunzione sulla veridicità delle formule uni-costanti ripercorrendo gli sviluppi analitici di Cauchy ed analizzando la critica fattane da Clausius; Stokes, però, sembra ravvisarne nuove sfavorevoli conseguenze, poiché da essa discenderebbe «that the molecules are not displaced among one another in an irregular manner, in consequence of the directive action of neighbouring molecules. Now it is obvious that the molecules of a fluid admit of being displaced among one another with great readiness. The molecules of solids, or of most of solids at any rate, must admit of new arrangements, for most solids admit of being bent, **permanently**, without being broken»¹²⁷. Sull'onda del ragionamento, Stokes si domanda allora se non si debba supporre che un solido sotto sforzo tenda a liberarsi dallo stato di tensione «in consequence of its molecules *tending towards* new relative positions», e conclude per l'assunzione *a priori* di una tale tendenza.

Non è difficile riconoscere in questo tentativo di giustificare a livello molecolare la bi-costanza delle formule (II.2.1a-b) la prefigurazione di un comportamento anelastico intrattabile nell'ambito di una teoria lineare; non a caso, di fronte a simili argomentazioni Saint-Venant avrà vita facile nel ribadire la validità delle formule uni-costanti, facendo leva sul fatto che esse sono «mathématiquement données pour vraies» solo quando gli spostamenti sono infinitesimi, nel qual caso si applicano anche ai liquidi, mentre sono «données pour *approximativement* exactes et applicables» quando le deformazioni, cioè gli spostamenti relativi delle molecole, sono estremamente piccole. Al contrario, è sufficiente che le deformazioni siano anche poco considerevoli, come ad esempio quelle che si manifestano nel caucciù senza che vi sia ancora alcun adattamento plastico, perché le formule lineari cessino di valere. Quando poi tale adattamento è in procinto di manifestarsi, quando cioè «il y a indifférence entre le retour à l'état primitif et le progrès vers un état nouveau, les résistances cessent d'augmenter proportionnellement aux changements dans les distances moléculaires. Alors les *dérivées secondes* $f''(r)$ des actions exprimées en fonction f de ces distances r commencent à influer notablement et à donner des termes sensibles (...); et les formules, dont la forme linéaire est fondée précisément sur ce qu'on néglige ces termes du seconde ordre dans les développements des actions nouvelles mises en jeu, cessent d'être suffisamment approchées»¹²⁸.

127 Ibidem, p. 120. Il grassetto è nostro.

128 Cfr. V Appendice al *Résumé des Leçons* di Navier, Paris, 1864, p. 739.

II.3. Gli assiomi di Maxwell.

La forza del ragionamento di Stokes va comunque aldilà della presunta esplicazione in termini molecolari, e non stupisce che Maxwell, recuperando fedelmente la linea argomentativa del maestro, abbia cercato una sua piú certa fondazione sulla base dei risultati sperimentali all'epoca disponibili. D'altra parte, che le conseguenze della teoria molecolare andassero strette al giovane scozzese è palese fin dallo spregiudicato esordio del suo lavoro "On the Equilibrium of Elastic Solids": «[t]here are few parts of mechanics in which theory has differed more from experiment than in the theory of elastic solids. Mathematicians, setting out from very plausible assumptions with respect to the constitution of bodies, and the laws of molecular action, came to the conclusions which were shewn to be erroneous by the observations of experimental philosophers. The experiments of Oersted proved to be at variance with the mathematical theories of Navier, Poisson, and Lamé and Clapeyron, and apparently deprived this practically important branch of mechanics of all assistance from mathematics»¹²⁹.

Maxwell sembra essere ben informato sullo "stato dell'arte"; fra i teorici, oltre quelli sopra menzionati, egli ricorda anche Cauchy, limitandosi però a citarne le ricerche continuiste, in accordo con le sue vedute; fra gli sperimentatori, a fianco a Oersted, compaiono i nomi di Canton, Perkins, Aimé, Colladon, Sturm, e Regnault, nonché quello di Wertheim in relazione alle ricerche del 1848. Per la verità, questi riferimenti appaiono piú di circostanza che non realmente inquadrati in un disegno definito: le conclusioni di Wertheim, ad esempio, sono contestate piú per l'esito uni-costante che per la loro erronea deduzione, né di esse vien colto il risvolto realmente innovativo insito nel valore di $\nu = \frac{1}{3}$, questo sì a favore di una revisione della vecchia teoria. Lo stesso Oersted, ricordato per il suo presunto *experimentum crucis*, è poi indirettamente criticato per aver tratto le sue conclusioni trascurando la compressibilità dei piezometri di prova, dimostrata invece influente dallo stesso Maxwell.

Con ciò non si vuol certo sminuire il lavoro del futuro inventore della teoria elettromagnetica, in realtà assai pregevole per l'ampia casistica delle applicazioni e per gli innovativi studi sull'analisi fotoelastica, quanto evidenziare il carattere ambiguo dei dati sperimentali e la loro facile manipolabilità; lo stesso Saint-Venant, d'altronde, sarà abilissimo nel trarre dagli stessi dati portati ad esempio dai detrattori della teoria uni-costante nuove conferme della sua validità¹³⁰.

¹²⁹ Maxwell J. C., "On the Equilibrium of Elastic Solids", *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, **20**, 87-120, 1853. Il testo al quale ci riferiamo è anche in J. C. Maxwell, *Scientific Papers*, **1**, 30-73, 1890, p. 30.

¹³⁰ Nello studio della sfera cava soggetta contemporaneamente a pressione interna ed esterna, trattato con evidente richiamo ai piezometri usati in campo sperimentale per determinare la compressibilità dei liquidi,

Crediamo in effetti che il merito principale del testo di Maxwell vada ricercato nell'atteggiamento metodologico decisamente moderno in esso assunto: anziché pretendere di fondare una teoria su incerte se non indimostrabili ipotesi sulla costituzione della materia, sarebbe sana prudenza affidarsi a principi generali che l'esperienza sembra confermare, pronti eventualmente ad abbandonarli ogni qualvolta essa ne provi la falsificabilità, nel senso popperiano del termine. Questa posizione di metodo prende forma nei due assiomi d'origine sperimentale per i quali (utilizzando i coefficienti di Stokes):

«1. *The sum of the three pressures is proportional to the sum of the compressions which they produce*», vale a dire

$$(II.3.1) \quad \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = A (\epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III})$$

«2. *The difference between two of the pressures is proportional to the difference of the compressions which they produce*»¹³¹, cioè

$$(II.3.2) \quad \sigma_I - \sigma_{II} = 2B (\epsilon_I - \epsilon_{II}) \quad \sigma_{II} - \sigma_{III} = 2B (\epsilon_{II} - \epsilon_{III}) \quad \sigma_{III} - \sigma_I = 2B (\epsilon_{III} - \epsilon_I)$$

Quanto fosse privilegiata questa interpretazione del comportamento materiale presso il mondo anglosassone è facile rendersi conto sfogliando le pagine dedicate all'argomento da Thomson e Tait nel loro celebre *Treatise on Natural Philosophy* del 1867, all'epoca un testo di assoluta autorità nel campo delle scienze razionali, la cui fortuna è testimoniata dalla ravvicinata stesura di un compendio di *Elements of Natural Philosophy* nel 1873, ripubblicato nel 1879, dalla seconda edizione della Cambridge University Press (1879-1883) e dalla

Maxwell trova correttamente che la compressibilità apparente del liquido dipende anche dalla compressibilità del recipiente, a differenza di quanto da Oersted sostenuto fin dal 1823 e poi ribadito nel 1828 (“Sur la compression de l'eau dans les vases de matières différentes”, *Ann. chim. et phys.*, II sér., **38**, 326-329, 1828). Già in un lavoro presentato nel 1827 ma pubblicato solo più tardi, Colladon e Sturm (“Mémoire sur la compression des liquides”, *Mém. par diverses savants*, **5**, 267-347, 1838) avevano messo in conto, seppur erroneamente, la dilatazione cubica Θ dei piezometri, valutandola moltiplicando per tre il valore della dilatazione lineare ϵ di un provino soggetto a trazione, senza tener conto quindi della contrazione trasversale; come apprendiamo da Todhunter-Pearson (*History*, **1**, p. 378), una precisazione di questo aspetto venne data per la prima volta da Poisson nella stessa memoria originale presentata all'Institut dai due sperimentatori (*Ann. chim. et phys.*, II sér., **36**, 1827), osservando che, secondo la sua teoria ($\nu = 1/4$) doveva essere $\Theta = 3\epsilon/2$. Più tardi, Aimé (“Mémoire sur la compression des liquides”, *Ann. chim. et phys.*, III sér., **8**, 257, 1843) ha ripetuto gli esperimenti di Colladon e Sturm e di Oersted adottando per la compressibilità il valore $3p/2E$ (p pressione applicata, E modulo di Young) dipendente dall'assunzione $\nu = 1/4$. Nel 1864 lo stesso Saint-Venant (cfr. *V Appendice alle Leçons* di Navier, p. 666), riconoscendo nelle esperienze di Oersted l'origine dei dubbi sulla teoria uni-costante, ha ripetuto i calcoli assumendo per il piombo usato nei piezometri un valore più credibile per il modulo di Young, pervenendo a risultati meglio accordabili con le misure di Oersted; egli stesso però, si è dimostrato propenso a far proprio l'atteggiamento assunto qualche anno prima da Regnault (“De la compressibilité des liquides”, *Mém. Ac. Sc.*, **21**, 429-464, 1847), ritenendo altamente probabili difetti d'isotropia nei materiali impiegati. Come si può intendere da questo accenno, sarebbe difficile attribuire credito speciale alle esperienze di Oersted; ne è peraltro prova indiretta il fatto che, nella citata *summa* di Bell sui fondamenti sperimentali della meccanica dei solidi, il nome del fisico danese non risulta neppure menzionato.

131 Maxwell J. C., op. cit., p. 31. Le (II.3.3) discendono direttamente dalle (II.2.1a) di Stokes.

parallela traduzione tedesca del 1871-'74. Dopo una menzione di merito a Stokes, per aver per primo mostrato, «from many obvious observations», la falsità della costanza del coefficiente ν di Poisson, sono ricordate le già citate ricerche di Wertheim e le successive esperienze di Kirchhoff¹³², indicanti senz'altro «rigidity less in proportion to compressibility than according to Navier's and Poisson's theory». Persino di fronte alla possibilità di ammettere quella teoria come caso limite ideale, rispondente alla “perfetta solidità”, il giudizio non è meno intransigente, poiché «it is scarcely possible to hold a piece of cork in the hand without perceiving the fallaciousness of this last attempt to maintain a theory which never had any good foundations». Il riferimento al sughero non è casuale, poiché rimanda ad alcune esperienze degli stessi autori comprovanti decisamente «that cork is much more rigid, while metals, glass, and gelatinous bodies are all less rigid, in proportion to resistance to compression than the supposed “perfect solid”»; in questo modo «the utter worthlessness of the theory is experimentally demonstrated»¹³³.

Questo giudizio, apparentemente inappellabile, è emesso soltanto tre anni dopo la pubblicazione della terza edizione del *Résumé des Leçons* di Navier, nella quale Saint-Venant aveva consacrato tutti i suoi sforzi per combattere le molteplici obiezioni d'oltre Manica indirizzate contro la “sua” teoria. Della replica a Stokes si è già detto; nei confronti di Maxwell, invece, la critica va inevitabilmente al carattere assiomatico della sua impostazione, giacché, nell'ottica pregiudiziale di Saint-Venant, «rien ne peut justifier l'adoption *a priori* de ces principes, et leur substitution à la loi des actions à distance (...)»¹³⁴. Da questo punto di vista, più calzante ci pare la controbiezione per la quale le formule ad un solo coefficiente

132 Kirchhoff G., “Ueber das Verhältniß der Quercontraction zur Längendilatation bei Stäben von federhartem Stahl”, *Annalen der Physik und Chemie*, **108**, 369-392, 1859. Dopo le esperienze di Wertheim (1848), queste di Kirchhoff sembrano essere le più attendibili per la valutazione del rapporto di Poisson attraverso prove statiche. Esse furono eseguite su barre d'acciaio temperato (3 campioni) e di ottone (1 campione) sottoposte a flessione composta a torsione, in modo da determinare ν indipendentemente dal diametro delle barre: le misure hanno fornito, per l'acciaio, un valore medio $\nu = 0,294$ e, per l'ottone, il valore $\nu = 0,387$, decisamente in disaccordo con il valore $0,25$ previsto dalla teoria molecolare e sensibilmente prossimi ai valori oggi generalmente accettati per tali materiali. Secondo Saint-Venant (“Mémoire sur les vibrations tournantes des verges élastiques”, *Comptes rendus*, **28**, 69-73, 1849 eV *Appendice* al Navier, p. 751), le citate ricerche di Wertheim sui cilindri cavi (1848), fornenti $\nu = 1/3$ ovvero $E/G = 8/3 = 2,666$ e sulle vibrazioni torsionali di aste cilindriche a sezione circolare ed ellittica (1857), fornenti in media $E/G = 2,67$, «peuvent s'expliquer d'une foule de manière», fra le quali la probabilità di un difetto d'isotropia, di fronte al quale occorrerebbe abbandonare le formule ad un coefficiente per considerare quelle relative ai vari casi d'anisotropia o quelle valide per i corpi amorfi; sui risultati di Kirchhoff per l'acciaio, Saint-Venant osserva che $E/G = 2(1+\nu) = 2(1+0,294) = 2,588$, la cui differenza dal valore teorico $2,5$ «est assez petite pour qu'on puisse l'attribuer à un défaut d'isotropie et d'homogénéité des barreaux» (V *Appendice*, p. 752).

133 Thomson W., Tait P. G., op. cit., p. 523. Alla convinzione di Thomson e Tait sembra esser giunto anche Maxwell nel passaggio in cui osserva che «jelly has a cubical elasticity little different from that of water, and a linear elasticity as small as we please; while cork, whose cubical elasticity is very small, has a much greater linear elasticity than jelly» (“On the Equilibrium ...”, p. 38).

134 Cfr. V *Appendice* al *Résumé des Leçons* di Navier, Paris, 1864, p. 719.

sarebbero perfettamente valide «pour des solides se comportant *comme des solides* (...) et nullement pour des corps intermédiaires entre les solides et les liquides, ou bien pour des ressorts *forcés* ou sur point de l'être»¹³⁵: in effetti, il sughero come la gelatina, la gomma e i tessuti vegetali, sembrano seguire un comportamento non lineare assai più marcato di quello riscontrabile nei materiali da costruzioni ai quali Saint-Venant intendeva applicabile la teoria.

II. 4. La doppia ipotesi di Rankine.

Il “metodo di Green” e gli assiomi coi quali Maxwell ha tradotto le convinzioni di Stokes non costituiscono le uniche vie al superamento della vecchia teoria rintracciabili nel variegato panorama della letteratura inglese; il loro prudentiale distacco da una definita rappresentazione in termini molecolari, a favore di più certi principi di carattere matematico o d'ordine sperimentale, ha anzi indotto Whittaker¹³⁶ ad attribuire a W. J. Macquorn Rankine il primo tentativo configurante un nuovo modello molecolare capace di rimuovere i limiti dell'antico.

Benché la personalità di Rankine sia più nota per i contributi in campo applicativo, raccolti negli apprezzati manuali di Meccanica Applicata (1858) e di Ingegneria Civile (1861) formanti la base dell'insegnamento delle discipline tecniche in molte università inglesi, il nome dello studioso scozzese va ricordato anche per l'impegno verso una definizione rigorosa dei concetti teorici e del linguaggio propri della meccanica dei solidi: a lui risalgono, ad esempio, le oggi usuali denominazioni di *stress* e *strain*, la classificazione dei coefficienti elastici in longitudinali, laterali e tangenziali, nonché una fiorita nomenclatura riferita alla loro distribuzione ellissoidale¹³⁷.

Anche nella memoria dedicata alle “Laws of the elasticity of solid bodies” sulla quale vogliamo soffermarci, il rigore argomentativo si propone fin dall'esordio nell'idea tutta moderna di una distinta e indipendente presentazione dell'analisi della deformazione e della tensione: «[t]he former is a question of pure Geometry; the latter, of pure Statics. They are usually considered simultaneously, on account of the analogy which exists between their solutions. This is not the result of the physical connexion between the two classes of phenomena, and it would still exist although there were no such physical connexion; it is a

135 Ibidem, p. 740.

136 Whittaker E., *A History of the Theories of Aether and Electricity*, London, 1951, p. 130.

137 Rankine W. J. M., “On Axis of Elasticity and Crystalline Forms”, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **146 B**, 261-285, 1856; anche in *Miscellaneous Scientific Papers*, 119-149, 1881.

consequence of the analogy between forces in Statics and straight lines in Geometry»¹³⁸. Su questa base, con puri ragionamenti «on the fundamental condition of symmetry», indipendentemente cioè da qualsiasi ipotesi molecolare, Rankine perviene alle formule per un corpo avente tre piani di simmetria

$$(II.3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{1111} \varepsilon_{11} + c_{1122} \varepsilon_{22} + c_{1133} \varepsilon_{33} & \sigma_{23} &= c_{2323} \gamma_{23} \\ \sigma_{22} &= c_{2211} \varepsilon_{11} + c_{2222} \varepsilon_{22} + c_{2233} \varepsilon_{33} & \sigma_{31} &= c_{3131} \gamma_{31} \\ \sigma_{33} &= c_{3311} \varepsilon_{11} + c_{3322} \varepsilon_{22} + c_{3333} \varepsilon_{33} & \sigma_{12} &= c_{1212} \gamma_{12} \end{aligned}$$

contenenti correttamente 12 coefficienti distinti, che l'autore ritiene riducibili a 9 per le tre relazioni

$$(II.3.2) \quad \begin{aligned} 4c_{2323} &= c_{2222} + c_{3333} - 2c_{2233} \\ 4c_{3131} &= c_{3333} + c_{1111} - 2c_{3311} \\ 4c_{1212} &= c_{1111} + c_{2222} - 2c_{1122} \end{aligned}$$

dedotte in base al teorema per cui «the coefficient of rigidity is the same for all directions of distorsion in a given plane»¹³⁹. Per quanto le (II.3.2) non siano generalmente valide¹⁴⁰, esse rivelano la linea conduttrice del ragionamento di Rankine non appena si passi ad esaminare le semplificazioni delle formule (II.3.1) alla luce delle due «hypotheses of atomic centres and of molecular vortices».

Sotto la prima non si nasconde altro che la «hypothesis of Boscovich», cioè l'usuale modello molecolare sfociante nelle relazioni di Cauchy; queste ultime però, sono ritrovate da Rankine attraverso una nuova e originale dimostrazione che lo stesso Saint-Venant¹⁴¹ ha in

138 Rankine W. J. M., "Laws of Elasticity of Solid Bodies", *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 6, 47-80, 178-181, 185-186, 1851, p. 3; presentato alla British Association il 1° agosto 1850 e ristampato in *Miscellaneous Scientific Papers*, 67-101, London, 1881.

139 Ibidem, p. 61.

140 L'uguaglianza dei coefficienti elastici tangenziali per tutte le direzioni in un dato piano è dedotta da Rankine dall'erroneo riconoscimento che «the tangential forces produced by equal transverse displacements relatively to two strain-normals which make any angle each other is equal, provided the displacements are in the same plane with the normals» (p. 61). Pearson ha ridimensionato la validità di questo teorema osservando che esso verrebbe ad affermare che, in un dato piano, si ha $\sigma_{ij} = \sigma_{ij'}$ se $\gamma_{ij} = \gamma_{ij'}$ «whatever rectangular directions lying in the same plane i,j and i',j' may be» (*History*, 2, I, p. 289); in effetti, è facile mostrare che la precedente uguaglianza è vera solo se i coincide con j' e j coincide con i', nel qual caso si ritrova l'usuale condizione $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ assieme a $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$. Ciò nondimeno, le tre relazioni (II.3.2) coincidono con quelle date da Saint-Venant per i corpi amorfi e valgono quindi relativamente a questi ultimi; esse inoltre sono sempre soddisfatte nel caso di isotropia, indipendentemente dalle relazioni di Cauchy, poiché allora vale la condizione $2c_{1212} = c_{1111} - c_{1122}$ che è esattamente la terza delle (II.3.2) quando si assuma $c_{1111} = c_{2222}$.

141 Con un ragionamento analogo a quello di Rankine, Saint-Venant ha indipendentemente ritrovato le relazioni di Cauchy nel "Mémoire sur la flexion des prismes" (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, II sér., 1, 1856, p. 106) e le ha riprodotte nella III Appendice (pp. 556-559) del commento al *Résumé des Leçons*

piú occasioni riportato come prova inconfutabile della riduzione a 15 dei coefficienti elastici. In breve, Rankine considera uno scorrimento γ_{32} secondo x_2 fra due piani di normale x_3 , a seguito del quale due molecole M, m , appartenenti ai due piani paralleli e distanti r fra loro, subiscono lo spostamento relativo $\Delta u_2 = \gamma_{32} r n_3$; la variazione della loro distanza è allora espressa da $\Delta r = \Delta u_2 n_2 = \gamma_{32} r n_3 n_2$ e la sua proiezione in direzione x_2 vale

$$\Delta r n_2 = \gamma_{32} r n_3 n_2^2 .$$

Prendendo poi in esame una dilatazione ϵ_{22} fra due piani di normale x_2 , egli riconosce che le due molecole M, m subiscono lo spostamento relativo $\Delta u_2 = \epsilon_{22} r n_2$; la variazione della loro distanza diviene $\Delta r = \Delta u_2 n_2 = \epsilon_{22} r n_2^2$ e la sua proiezione in direzione x_3 vale

$$\Delta r n_3 = \epsilon_{22} r n_2^2 n_3 .$$

Ora, poiché l'azione fra M e m è proporzionale alla variazione della loro distanza, la componente di tensione σ_{32} , risultante di azioni proporzionali a $\gamma_{32} r n_3 n_2^2$, sarà uguale alla componente di tensione σ_{33} , risultante di azioni proporzionali a $\epsilon_{22} r n_2^2 n_3$, qualora si ponga $\gamma_{23} = \epsilon_{22}$: si ha cioè

$$\sigma_{32} \text{ (dovuta a } \gamma_{32}) = \sigma_{33} \text{ (dovuta a } \epsilon_{22}) \quad \text{per } \gamma_{23} = \epsilon_{22}$$

quindi $c_{3232} = c_{3322}$ e, analogamente, $c_{1313} = c_{1133}$ e $c_{2121} = c_{2211}$.

Queste ultime uguaglianze sono tre delle sei relazioni di Cauchy alle quali Rankine perviene attraverso questo brillante ragionamento; le altre tre, assenti nella sua trattazione per la forma già particolare delle (II.3.1), saranno dedotte da Saint-Venant nei lavori prima citati¹⁴². In base ad esse le (II.3.2) consentono di scrivere

(1864) di Navier, dopo aver riconosciuto a Rankine il primato dell'originale deduzione nel "Mémoire sur la distribution des élasticités ..." (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, II sér., **8**, p. 269).

¹⁴² Per dedurre le altre tre relazioni di Cauchy, Saint-Venant (*Résumé des Leçons*, 1864, pp. 558-559) considera uno scorrimento γ_{23} secondo x_3 fra due piani di normale x_2 , a seguito del quale due molecole M, m , appartenenti ai due piani e distanti r fra loro, subiscono lo spostamento relativo $\Delta u_3 = \gamma_{23} r n_2$; la variazione della loro distanza è $\Delta r = \Delta u_3 n_3 = \gamma_{23} r n_2 n_3$ e la proiezione di tale variazione secondo x_1 vale

$$\Delta r n_1 = \gamma_{23} r n_2 n_3 n_1 ;$$

egli considera quindi uno scorrimento γ_{31} secondo x_3 fra due piani di normale x_1 , a seguito del quale due molecole M, m , appartenenti ai due piani e distanti r fra loro, subiscono lo spostamento relativo $\Delta u_3 = \gamma_{31} r n_1$; la variazione della loro distanza è $\Delta r = \Delta u_3 n_3 = \gamma_{31} r n_1 n_3$ e la proiezione di tale variazione secondo x_2 vale

$$\Delta r n_2 = \gamma_{31} r n_1 n_3 n_2 .$$

Ora, poiché l'azione fra M e m è proporzionale alla variazione della loro distanza, la componente di tensione σ_{11} , risultante di azioni proporzionali a $\gamma_{23} r n_2 n_3 n_1$, sarà uguale alla componente di tensione σ_{12} , risultante di azioni proporzionali a $\gamma_{31} r n_1 n_3 n_2$, qualora si ponga $\gamma_{23} = \gamma_{31}$: si ha cioè

$$\sigma_{11} \text{ (dovuta a } \gamma_{23}) = \sigma_{12} \text{ (dovuta a } \gamma_{31}) \quad \text{per } \gamma_{23} = \gamma_{31}$$

quindi $c_{1123} = c_{1231}$ e, analogamente, $c_{2231} = c_{2312}$ e $c_{3312} = c_{3123}$.

$$(II.3.3) \quad \begin{aligned} c_{1111} &= 3(c_{3131} + c_{1212} - c_{2323}) \\ c_{2222} &= 3(c_{1212} + c_{2323} - c_{3131}) \\ c_{3333} &= 3(c_{3131} + c_{2323} - c_{1212}), \end{aligned}$$

da cui la notevole conclusione per la quale «in a body whose elasticity arises wholly from the mutual actions of atomic centres, all the coefficients of elasticity are functions of the three coefficients of rigidity. Rigidity being the distinctive property of solids, a body so constituted is properly termed a *perfect solid*»¹⁴³.

Ecco dunque riemergere, sotto altra via, la linea argomentativa di Stokes e Maxwell per la quale l'idea della "perfetta solidità" è invariabilmente associata all'originario modello molecolare sfociante nelle formule uni-costanti; nel caso isotropo infatti, essendo uguali fra loro i coefficienti d'elasticità tangenziali, cioè $c_{2323} = c_{3131} = c_{1212} = \mu$, Rankine ritrova le condizioni

$$(II.3.4) \quad c_{1111} = c_{2222} = c_{3333} = 3\mu \quad c_{2233} = c_{3311} = c_{1122} = \mu \quad (\text{unica relazione di Cauchy})$$

«agreeing with the results deduced by various mathematicians from the hypothesis of Boscovich».

In quella stessa linea di pensiero si colloca la via alternativa facente capo alla seconda «hypothesis of molecular vortices», espressa dall'autore nei termini seguenti: «supposing a body to consist of a continuous fluid, diffused through space with perfect uniformity as to density and all other properties, such a body must be totally destitute of rigidity or elasticity of figure, its parts having no tendency to assume one position as to *direction* rather than another. It may, indeed, possess elasticity of *volume* to any extent (...). Its longitudinal and lateral elasticities will be equal in every direction; and they must be equal each other»¹⁴⁴, infatti le (II.3.2) per un tale corpo, simulante il comportamento dei fluidi perfetti, danno

$$c_{2323} = c_{3131} = c_{1212} = 0 \quad c_{1111} = c_{2222} = c_{3333} = c_{2233} = c_{3311} = c_{1122} .$$

«If we now suppose this fluid to be partially condensed round a system of centres, there will be forces between those centres, greater than those between other points of the body. The body will now possess a certain amount of rigidity; but less, in proportion to its longitudinal and lateral elasticity, than the amount proper to the condition of perfect solidity. Its elasticity

¹⁴³ Rankine W. J. M., op. cit., p. 66.

¹⁴⁴ Ibidem, pp. 66-67.

will, in fact, consist of two parts, one of which, arising from the mutual actions of the centres of condensation, will follow the laws of perfect solidity; while the other will be a mere elasticity of volume, resisting change of bulk equally in all directions»¹⁴⁵. Ecco allora delineato il comportamento dei “solidi imperfetti”: *«in an imperfect solid, according to the hypothesis of molecular vortices, each of the coefficients of longitudinal and lateral elasticity is equal to the same function of the coefficients of rigidity which would be its value in a perfect solid, added to a coefficient of fluid elasticity which is the same in all directions»*¹⁴⁶.

Indicato con J tale coefficiente di fluido-elasticità, le relazioni corrispondenti alle (II.3.4) per il “solido imperfetto” isotropo divengono, fermo restando $c_{2323} = c_{3131} = c_{1212} = \mu$,

$$(II.3.5) \quad c_{1111} = 3\mu + J \quad c_{1122} = \mu + J,$$

la seconda delle quali mostra come il fallimento dell'unica relazione di Cauchy vada ricondotto all'aggiuntiva presenza di un certo incremento di elasticità di volume J in grado d'esprimere, quando rapportato alla rigidezza a taglio μ , tutta la gamma del comportamento materiale.

L'interesse per questa seconda ipotesi, formulata inizialmente da Rankine con riferimento all'azione meccanica del calore sull'elasticità dei gas (*Trans. Royal Soc. Edinburgh*, **20**), va ben aldilà della sua verbosa denominazione; sotto mutate spoglie infatti, essa è stata inconsapevolmente riesumata nella fisica moderna per giustificare il trattamento teorico dei solidi metallici di fronte alla loro manifesta quanto inattesa deviazione dalle relazioni di Cauchy. Come meglio riconosceremo nel seguito, i reticoli cubici dei cristalli metallici (Li, Na, K, Cu) soddisfano condizioni di simmetria per le quali, nella plausibile ipotesi di forze centrali, sarebbe prevista la validità della relazione di Cauchy $c_{1122} = c_{1212}$, smentita invece dai risultati sperimentali. Orbene, i primi calcoli quanto-meccanici, intrapresi da Fuchs¹⁴⁷ per la valutazione delle costanti elastiche di tali cristalli, hanno rivelato che il contributo energetico connesso agli elettroni di valenza (energia di Fermi) gioca un ruolo essenziale sulla loro compressibilità. In modellazioni fenomenologiche piú recenti, De Launay¹⁴⁸ ha trattato i reticoli cubici a corpo centrato (bcc) e a facce centrate (fcc) di metalli

145 Ibidem, p. 67.

146 Ibidem, p. 68.

147 Fuchs K., “A quantum mechanical investigation of the cohesive forces of metallic copper”, *Proceedings of the Royal Society of London*, **151 A**, 585-599, 1935; “A quantum mechanical calculation of the elastic constants of monovalent metals”, *Idem*, **153 A**, 622-639, 1936; “The elastic constants and specific heats of the alkali metals”, *Idem*, **157 A**, 444-450, 1936; Fuchs K. and Peng H. W., “Crystal theory of metals: calculation of the elastic constants”, *Idem*, **180 A**, 451-476, 1942.

148 De Launay J., “The theory of specific heats and lattice vibration”, *Solid state physics. Advances in research and applications*, **2**, 219-303, 1956.

monoatomici supponendoli immersi in un gas elettronico assunto come un continuo dotato di modulo di compressibilità K_e e privo di resistenza a taglio; ammesse interazioni centrali fra i soli primi e secondi vicini, egli ha trattato il comportamento dinamico dei reticoli al limite d'onda lunga, trasformando le equazioni alle differenze del moto degli ioni nelle corrispondenti equazioni differenziali, le quali diventano, per il reticolo bcc

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\alpha_1 a^2}{3} \left[\nabla^2 u_1 + 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] - \frac{a^2}{3} (2\alpha_1 - 3\alpha_2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \quad \text{e analoghe}$$

e, per il reticolo fcc,

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\alpha_1 a^2}{4} \left[\nabla^2 u_1 + 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] - a^2 \left(\frac{\alpha_1}{4} - \alpha_2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \quad \text{e analoghe}$$

ove M è la massa del generico ione, α_1 e α_2 sono le costanti di forza riferite ai primi e ai secondi vicini rispettivamente, e a rappresenta la costante di reticolo nei due casi. Considerando gli spostamenti in forma di onda piana, l'autore scinde le loro componenti in una parte longitudinale e in una trasversale ponendo $u_1 = u_1^l + u_1^t$, $u_2 = u_2^l + u_2^t$, $u_3 = u_3^l + u_3^t$, e riscrive le equazioni del moto tenendo conto che, per la presenza del gas elettronico, le costanti di forza rispetto alle componenti longitudinali assumono la forma modificata α'_1 e α'_2 . Il confronto fra le equazioni secolari corrispondenti al reticolo e al continuo porge quindi le relazioni fra le costanti di forza α_1 , α_2 , α'_1 , α'_2 e le costanti elastiche (adiabatiche) c_{1111} , c_{1122} , c_{1212} ; esse risultano, nel caso del reticolo bcc,

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} a c_{1212} \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} a (c_{1111} - c_{1122}) \quad \alpha'_1 = \frac{1}{2} a (c_{1122} + 2c_{1212}),$$

alle quali si aggiunge la condizione $\alpha'_2 = \alpha_2 + \frac{2}{3} (\alpha'_1 - \alpha_1)$ correlante le quattro costanti di forza alle tre elastiche, e, nel caso del reticolo fcc,

$$\alpha_1 = a c_{1212} \quad \alpha_2 = \frac{1}{4} a (c_{1111} - c_{1122} - c_{1212}) \quad \alpha'_1 = \frac{1}{3} a (c_{1111} + 2c_{1212}),$$

assieme alla condizione $\alpha'_2 = \alpha_2 + \frac{1}{4} (\alpha'_1 - \alpha_1)$.

Come atteso, in entrambi i casi i valori $(c_{1111} - c_{1122})$ e c_{1212} non dipendono da α'_1 e α'_2 , cioè non sono influenzate dalla presenza del gas elettronico, essendo infatti correlati a soli moti trasversali, mentre si ha, per il reticolo bcc,

$$c_{1122} - c_{1212} = \frac{2}{a} (\alpha'_1 - \alpha_1)$$

e, per il reticolo fcc

$$c_{1122} - c_{1212} = \frac{3}{a} (\alpha'_1 - \alpha_1),$$

per cui l'effetto del gas elettronico si traduce nella rimozione della relazione di Cauchy, risultando in generale $c_{1122} - c_{1212} = K_e$ in perfetta analogia con la teoria di Rankine.

II. 5. Jellett e le due ipotesi sulla classificazione dei solidi.

Se la preoccupazione di affrancarsi dalle relazioni di Cauchy era stata risolta da Rankine arricchendo il modello tradizionale con la semplice attribuzione di un grado variabile di resistenza alla dilatazione cubica, propositi piú generali vanno riconosciuti al cospicuo lavoro di Jellett "On the Equilibrium and Motion of an Elastic Solid"¹⁴⁹, seppur comune sia l'intento di supportare la trattazione matematica alla luce di plausibili ipotesi fisiche.

Denunciando come «almost purely mathematical» il principio col quale Green aveva dedotto le equazioni dell'elasticità supponendo il lavoro delle forze interne esprimibile dalla variazione di una certa funzione delle deformazioni, Jellett si propone infatti di riformulare l'intera teoria dei solidi elastici sulla base di un principio «essentially physical», per il quale il comportamento materiale sarebbe riconducibile a due distinte ipotesi sulle modalità d'interazione tra le particelle: l'una, denominata «*hypothesis of independent action*», attribuibile a quei corpi «whose particles exert upon each other a force which is *independent* of the surrounding particles; a force, therefore, which can be changed only by a displacement of one or both of the particles under consideration»; l'altra, definita «*hypothesis of modified action*», comprendente tutti gli altri corpi, per i quali «the mutual action of two particles is supposed to be affected by that of the surrounding particles»¹⁵⁰.

La prima ipotesi sembra dover sfociare necessariamente nelle ristrette conclusioni dell'originaria teoria molecolare; in realtà, quest'ultima è ritrovata da Jellett soltanto al termine di un lungo processo deduttivo disvelante un piú ampio orizzonte nella gamma del comportamento materiale.

Partendo dall'espressione $f = f(x_1, x_2, x_3, x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3, \Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$ dell'azione fra due molecole M e m, funzione delle loro coordinate (x_1, x_2, x_3) e $(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3)$ e degli spostamenti relativi $\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3$, Jellett ne scrive lo sviluppo al prim'ordine

¹⁴⁹ Jellett J. H., "On the Equilibrium and Motion of an Elastic Solid", *Transactions of the Royal Society Academy*, **22**, III, 179-217, 1852.

¹⁵⁰ *Ibidem*, p. 181.

$$f = f^0 + f^1 = f^0 + A \Delta u_1 + B \Delta u_2 + C \Delta u_3$$

ove A, B, C sono, in generale, funzioni delle coordinate (x_1, x_2, x_3) ; quindi, supposto d'equilibrio lo stato iniziale ($f^0 = 0$), ed introdotti gli sviluppi approssimati

$$\Delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} r n_j ,$$

con r distanza iniziale tra M e m, egli trova

$$f = r [A (n_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}) + B (n_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) + C (n_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3})].$$

A questo punto però, Jellett scrive le componenti di f secondo gli assi nella forma

$$f_1 = f n_1' \quad f_2 = f n_2' \quad f_3 = f n_3' \quad \text{con } n_1' \neq n_1, \quad n_2' \neq n_2, \quad n_3' \neq n_3 ,$$

ammettendo implicitamente la possibilità di azioni non centrali. Quindi, definiti i “momenti delle forze” $f_1 \delta \Delta u_1, f_2 \delta \Delta u_2, f_3 \delta \Delta u_3$ sotto l'assunzione che «*the forces developed by the displacements of the several particles tend to change their relative positions only*», egli integra sulla sfera d'attività di M per ottenere quelli di tutte le molecole dopo aver introdotto le quantità

$$A_{ijh}' = \iiint A r^2 n_i n_j n_h' dV \quad B_{ijh}' = \iiint B r^2 n_i n_j n_h' dV \quad C_{ijh}' = \iiint C r^2 n_i n_j n_h' dV ,$$

pervenendo, per i “momenti” di tutte le forze f_1 , all'espressione

$$\begin{aligned} M_1 = & A_{111}' \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + A_{221}' \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} + A_{331}' \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} \\ & + A_{231}' \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} \right) + A_{131}' \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} \right) + A_{121}' \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} \right) \\ & + B_{111}' \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + B_{221}' \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} + B_{331}' \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} \\ & + B_{231}' \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} \right) + B_{131}' \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} \right) + B_{121}' \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} \right) \\ & + C_{111}' \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + C_{221}' \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} + C_{331}' \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} \\ & + C_{231}' \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} \right) + C_{131}' \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} \right) + C_{121}' \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} \right) \end{aligned}$$

e, per i momenti M_2 e M_3 delle forze f_2 e f_3 , ad espressioni analoghe, ciascuna delle quali contenente 18 distinti coefficienti; trattando poi con la classica procedura variazionale l'equazione dei lavori virtuali

$$\iiint (F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 + F_3 \delta u_3) dx_1 dx_2 dx_3 + \iiint (M_1 + M_2 + M_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

Jellett perviene alle equazioni d'equilibrio e di movimento nelle quali si distinguono 54 coefficienti: «this is the greatest number of constants which these equations could be made to have without a change of form».

Ammissa poi l'esistenza di una funzione potenziale Φ «by whose variation the sum of the internal moments of the body may be represented», cioè tale che $\delta\Phi = M_1 + M_2 + M_3$, Jellett riconosce l'esistenza di 18 uguaglianze fra i 54 coefficienti, il cui numero si riduce quindi a 36.

Scendendo ancora “per li rami” della classificazione fino a trattare i corpi «composed of attracting and repelling molecules», Jellett osserva che ad essi si addicono le condizioni per le quali «the direction of the force is in the line joining the molecules» e «the intensity of this force, for each pair of molecules, is represented by a function of the distance». In base alla prima, esprime il carattere centrale delle azioni, si deve porre $n_1 = n_1$, $n_2 = n_2$, $n_3 = n_1$, per cui i 54 coefficienti divengono 30 effettivamente distinti; traducendo poi la seconda condizione in quella equivalente per la quale «the sum of the internal moments may be represented by the variation of a single function», l'autore mostra che i coefficienti si riducono ulteriormente a 15, come in effetti previsto alla luce delle due suddette condizioni.

Passando poi all'ipotesi dell'azione “modificata”, ad esempio per la presenza di una terza molecola m' di coordinate $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$, l'espressione della forza fra M e m diviene

$$f = f(x_i, x_i + \Delta x_i, x_i + \Delta x_i, \Delta u_i, \Delta u_i) \quad i = 1, 2, 3$$

ove $\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3$ sono le componenti dello spostamento relativo fra M e m' ; trattandola come in precedenza, l'autore trova

$$f = r \left[a \left(n_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + b \left(n_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + c \left(n_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] \\ + r' \left[a' \left(n_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + b' \left(n_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + c' \left(n_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right],$$

ove a, b, c, a', b', c' sono, in generale, funzioni delle coordinate e n_1, n_2, n_3 sono ora i coseni direttori individuanti la congiungente r' fra M e m' . Ora, Jellett osserva che «as the foregoing expression represents that part of the modifying force which results from the relative displacement of m' , it seems that the most general supposition which we can make as to the aggregate effect of all the particles is, that it is estimated by multiplying this expression by

some function of the polar co-ordinates of m' , as also by the element of mass, and integrating through the whole sphere of molecular activity»¹⁵¹. Questa procedura sfocia in un'espressione della forma

$$A_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + B_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + C_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + C_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + C_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

per cui il valore generale dell'azione diviene

$$\begin{aligned} f = & (A r n_1 + A_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (A r n_2 + A_2) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + (A r n_3 + A_3) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ & + (B r n_1 + B_1) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + (B r n_2 + B_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (B r n_3 + B_3) \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ & + (C r n_1 + C_1) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + (C r n_2 + C_2) \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + (C r n_3 + C_3) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} . \end{aligned}$$

Jellett si arresta a questo punto, ritenendo «unnecessary to pursue the consequences of this principle further», dato che quello alternativo dell'azione indipendente sembra poter offrire tutta la generalità richiesta nei problemi della meccanica molecolare; egli non manca però di fare un'osservazione importante, precisando che «with regard to the particular case of physical optics, we infer that if a luminous ether exist, whose constitution agrees with either of the hypotheses advanced by Professor MacCullagh and Mr. Green respectively, each of the particles of that medium must be supposed to be capable of *modifying* the force exerted by any other particle within its sphere of action»¹⁵².

Con questo riconoscimento, Jellett tocca l'aspetto essenziale attraverso il quale crediamo debba interpretarsi la grande disputa sul numero delle costanti, aspetto che emergerà in tutta la sua portata solo nel tardo commento di Saint-Venant all'edizione francese (1883) del celebre testo sull'elasticità di Clebsch, sebbene le premesse per quella disputa fossero da tempo latenti in suoi scritti di gran lunga anteriori. Su questi torneremo tra breve, dando parola allo stesso Saint-Venant; prima è infatti necessario delineare il contesto di sostanziale isolamento nel quale il vecchio scienziato si trovò ad affermare per l'ultima volta la sua posizione a favore dell'originaria teoria molecolare.

151 Ibidem, p. 201.

152 Ibidem, p. 205.

II. 6. Contro il Maestro.

Sulla possibilità di un'azione modificata, ovvero, in linguaggio piú moderno, di una forza derivabile da un potenziale a molti corpi, si era espresso lo stesso Cauchy in una memoria indubbiamente secondaria, nella quale metteva alla prova il suo intransigente cattolicesimo di scienziato per dimostrare che «une force physique (...) est l'expression d'un loi établie par le Créateur»¹⁵³; abbandonando, nelle ultime pagine del testo, la discussione sull'ordine dell'universo «sous le point de vue morale», per riprenderla dal punto di vista fisico, egli si domandava infatti se «outre les forces qui se manifestent quand deux points matériels sont placés en présence l'un de l'autre, et que l'on pourrait appeler, pour cette raison, des actions *binaires*, ne devrait-on pas admettre, au moins dans certaines circonstances, des actions *ternaires*, *quaternaires*, etc., dont chacune dépendrait des positions relatives de trois, de quatre, etc. points placés en présence l'un de l'autre (...). Cette supposition paraît appuyée par l'analogie et semble même indiquée par plusieurs phénomènes»¹⁵⁴, fra i quali si iscrive quello della cristallizzazione, già additato dallo stesso Green per giustificare il rigetto di qualunque ipotesi restrittiva sulla natura delle azioni molecolari.

In Cauchy, questi spunti restano a livello di enunciato: l'idea di un'azione “modificata” sarebbe solo un possibile espediente al quale ricorrere «s'il était prouvé qu'en admettant seulement des actions binaires on ne peut parvenir à se rendre compte de tous les faits observés»¹⁵⁵. Una formalizzazione matematica piú consistente di tali idee, intesa a riprendere

153 Cauchy A.-L., “Mémoire sur les secours que les sciences de calcul peuvent fournir aux sciences physiques ou même aux sciences morales, et sur l'accord des théories mathématiques et physiques avec la véritable philosophie”, *Comptes rendus*, **21**, II sem., 134-143, 1845.

154 *Ibidem*, p. 142.

155 *Ibidem*, p. 143. Già in alcune brevi note e comunicazioni della fine degli anni '30, in parte estese in forma di memorie nei primi due volumi degli *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique* (1840-1841), Cauchy suggerisce possibili ampliamenti del modello iniziale: nel “Mémoire sur la constitution des molécules intégrantes et sur les mouvements atomiques des corps cristallisés” (*Comptes rendus*, **9**, II sem., 558-560, 1839), egli ritiene che, «pour rendre raison de la forme polyédrique de ces molécules, il suffit d'admettre que chaque molécule est composée d'atomes, ou points matériels (...). Cela posé, il ne suffira point de considérer un cristal comme un système de points matériels (...) mais on devra considérer ce cristal comme formé par la réunion de plusieurs systèmes d'atomes placés dans le même espace en présence les uns des autres». (p. 558). In questa idea si esprime la moderna concezione dei reticoli cristallini multipli o con base, intesi come assemblaggi di due (o piú) reticoli primitivi di Bravais; la considerazione di assemblaggi di particelle piú complessi del semplice «système de points matériels» è di rilevante importanza, perché il loro studio ha consentito di rimuovere le relazioni di Cauchy pur conservando l'ipotesi di forze centrali, come vedremo analizzando l'opera di Born. È in particolare nel “Mémoire sur les pressions ou tension intérieures, mesurées dans un ou plusieurs systèmes de points matériels que sollicitent des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle” (*Comptes rendus*, **16**, I sem., 299-308, 954-967, 1035-1039, 1843) che Cauchy offre nuove formule per le tensioni la cui generalità prelude al superamento delle relazioni che portano il suo nome. In una piú tarda “Note sur l'équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides” (*Comptes rendus*, **32**, I sem., 323-326, 1851) egli giunge ad osservare che, se si considera un corpo cristallizzato come un sistema di molecole ciascuna delle quali sia in sé un sistema di atomi, «les coefficients renfermés dans les équations des mouvements vibratoires de ce corps cesseront d'être des quantités constantes» per divenire funzioni periodiche delle coordinate. La conseguenza di ciò sta nel fatto che, trattando quelle equazioni in modo da ottenerne altre contenenti i valori medi degli spostamenti, cioè gli

il discorso laddove Jellett lo aveva lasciato, va piuttosto rintracciata nelle “Recherches (...) sur la constitution moléculaires des corps” con le quali Boussinesq¹⁵⁶ si propose l'ambizioso compito di trattare, sotto l'unificante «*postulatum* (...) de la conservation de l'énergie», tutti i fenomeni connessi ai movimenti dei corpi, alle loro vibrazioni prodotte dal calore e alla propagazione della luce.

Occupatosi dell'argomento fin dal 1867¹⁵⁷, il promettente allievo di Saint-Venant era giunto alla convinzione che, in un sistema di particelle soggette alle mutue forze attrattive e repulsive, «l'action d'un point sur un autre est dirigée suivant leur droite de jonction (...) et a pour valeur la dérivée, par rapport à leur distance, d'une certain fonction de toutes les distances mutuelles des points du système. Cette dérivée doit en général dépendre, non seulement de la distance des deux points considérés, comme le voudrait une opinion très-répondue basée sur le désir de trouver simples les lois naturelles, mais encore des distances des points matériels voisins, s'il en existe. En d'autres termes, rien ne prouve que l'action de deux points ne puisse pas être influencée par la présence d'un certain nombre d'autres, et que l'on ne doive pas admettre comme possible, en Mécanique moléculaire, des actions et réactions de présence»¹⁵⁸. Contro quell'«opinione assai diffusa», Boussinesq eleva dunque le sue «raisons théoriques» per le quali, sebbene i fenomeni gravitazionali mostrino la validità della semplice legge di Newton per le grandi distanze, nulla impedisce l'ammissione *a priori* di tali azioni di presenza nel caso dei minimi intervalli molecolari.

Con ciò il giovane allievo prendeva tacitamente le distanze dal maestro, alleandosi idealmente con l'opposta linea di Green. Anticipando la discussione sul pensiero di Saint-Venant, occorre infatti ricordare fin d'ora come una tale conclusione sia inconciliabile con i suoi propositi di riformulare i principi della Meccanica in termini strettamente cinematici. Sin

spostamenti dei centri di gravità delle molecole, si perviene a delle formule in cui i 36 coefficienti non hanno necessariamente le relazioni che li riducono a 15. Nella *Appendice V al Résumé de Leçons* di Navier (pp.689-706), Saint-Venant accenna ad una conversazione sull'argomento avuta con lo stesso Cauchy, in cui questi si dichiarava comunque a favore delle formule unicostanti per l'isotropia. Affrontando analiticamente il problema, Saint-Venant conclude che nei corpi a cristallizzazione regolare, in cui i gruppi atomici formanti le molecole non partecipano semplicemente alle deformazioni generali del loro insieme ma subiscono movimenti d'altra natura (ad esempio delle rotazioni su se stessi), è possibile che le 21 uguaglianze tra i coefficienti vengano alterate; queste alterazioni però dovrebbero essere pressoché insensibili, perché è difficile credere che i gruppi atomici subiscano deformazioni particolari sensibilmente diverse da quelle d'insieme. A proprio sostegno Saint-Venant cita l'ultimo lavoro di Poisson sui cristalli, per i quali sono riportate formule a 15 costanti. Sembra di poter dire però che Poisson, concependo i corpi cristallizzati come sistemi regolari di molecole rigide di forma poliedrica, e perciò soggette, in generale, ad azioni non centrali capaci di produrre rotazioni, assimili queste ultime all'idea di gruppo atomico ed è vero che Voigt, partendo da questa sua concezione, ne ha rivisto le conclusioni formulando una nuova teoria delle azioni a distanza a 21 costanti distinte.

156 Boussinesq J., “Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **18**, 305-360, 1873.

157 Boussinesq J., “Note sur l'action réciproque de deux molécules”, *Comptes rendus*, **64**, 44-46, 1867.

158 Boussinesq J., op. cit., p. 306.

dal 1845, in un “Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la Mécanique”, egli si era fatto consapevole portavoce di ciò che «d'Alembert, Carnot, et d'autres géomètres voyaient uniquement dans cette science, savoir, des combinaisons d'espace et de temps»¹⁵⁹; con l'esplicito proposito di eludere qualsiasi riferimento al concetto di forza come causa efficiente del moto, Saint-Venant era giunto a reinterpretare la legge fondamentale della dinamica del punto materiale $\frac{dv}{dt} = F + F_1 + F_2 + \dots$, leggendovi, al primo membro, «un *coefficient différentiel géométrique*, que l'on peut appeler *flux géométrique* de la vitesse v », e, al secondo, la somma dei flussi parziali di velocità, ciascuno dei quali sarebbe «le flux effectif de vitesse que m [il punto] prendrait constamment, en vertu de *lois* particuliers connues, si chacune des *circonstances de position* où il se trouve à la fois, par rapport à d'autres corps, avait lieu seule sans les autres»¹⁶⁰.

Ora, nello schema argomentativo di Boussinesq, una tale riduzione della dinamica alla cinematica sembra lecita per le sole attrazioni newtoniane alle grandi distanze: lo stesso Boussinesq, quasi parafrasando il ragionamento *more geometrico* di Saint-Venant, osserva che «*lorsqu'un point est situé à des distances sensibles des autres points avec lesquels il se trouve en rapport, ses accélérations (. . .) sont respectivement, à chaque époque, les sommes de celles qu'il aurait s'il était séparément en rapport avec chacun des autres points*»¹⁶¹. Diversa è invece la situazione per le azioni molecolari, ciascuna delle quali risulterebbe funzione delle mutue distanze fra tutti i punti del sistema; in tal caso, infatti, la «loi de simultanéité» $\frac{dv}{dt} = F + F_1 + F_2 + \dots$ perde il suo statuto cinematico che ne consentiva la lettura in termini di composizione geometrica dei singoli flussi parziali, poiché ogni addendo a secondo membro non dipende più dalle singole «circostanze di posizione» ma risulta influenzato contemporaneamente da tutte.

Questa preoccupazione è totalmente assente nel lavoro di Boussinesq e non stupisce che Saint-Venant, in una posteriore *Analyse succincte des travaux de M. Boussinesq*, abbia avvertito il “tradimento” dell'ex allievo giudicando che «la nécessité où il est de faire quelques hypothèses nous détermine à nous abstenir d'ajouter ce vaste essai à ses nombreux titres»¹⁶²; ma è proprio in questa generalizzazione sulla natura delle forze operanti alle piccole distanze che consiste l'interesse per il testo di Boussinesq. Solo ammettendo le azioni

¹⁵⁹ Barré de Saint-Venant A. J. C., “Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la Mécanique”, *Comptes rendus*, 21, II sem., 620-625, 1845, pp. 624-625.

¹⁶⁰ Ibidem, p. 625.

¹⁶¹ Boussinesq J., op. cit., p. 317.

¹⁶² Barré de Saint-Venant A. J. C., *Analyse succincte des travaux de M. Boussinesq, professeur à la Faculté des sciences de Lille, faite par M. de Saint-Venant*, 1880, p. 18.

di presenza sarebbe infatti possibile stabilire le leggi che convengono ai solidi e ai fluidi e che regolano il passaggio da uno stato all'altro della materia; sotto questo profilo, l'effetto della presenza di altre molecole sull'azione fra due qualunque di esse può essere rappresentato «au moyen de certains éléments généraux définissent jusqu'à un certain point l'état du milieu, la densité par exemple»¹⁶³.

Ora, osserva Boussinesq, l'azione fra due molecole M, m di coordinate (x_1, x_2, x_3) e $(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3)$ aventi distanza iniziale r e soggette rispettivamente agli spostamenti (u_1, u_2, u_3) e $(u_1+\Delta u_1, u_2+\Delta u_2, u_3+\Delta u_3)$, è data, nell'usuale approssimazione al prim'ordine per gli spostamenti relativi $\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3$, dall'espressione generale

$$(II.5.1) \quad a + b_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + b_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + c_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + c_2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + c_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

ove i coefficienti a, b_1 , etc. dipendono dalla posizione relativa di m rispetto a M nello stato iniziale. Per corpi isotropi e qualora si assuma le due molecole allineate secondo l'asse x_3 , la (II.5.1) prende la forma semplificata

$$(II.5.2) \quad a - b_1 \frac{\Delta \rho}{\rho} + (b_3 - b_1) \frac{\Delta r}{r},$$

ove il rapporto $-\frac{\Delta \rho}{\rho}$ fra la diminuzione della densità iniziale e la densità stessa rappresenta la dilatazione cubica $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ ed il rapporto $\frac{\Delta r}{r}$ è la stessa dilatazione $\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ della linea r . Boussinesq osserva che la parte $(a - b_1 \frac{\Delta \rho}{\rho})$ può intendersi come il termine sensibile dello sviluppo nelle potenze ascendenti di $\Delta \rho$ di una certa funzione $F(r, \rho + \Delta \rho)$; poiché tale funzione è equivalente, al prim'ordine, alla differenza $F(r + \Delta r, \rho + \Delta \rho) - \frac{\partial F(r, \rho)}{\partial r} \Delta r$, è possibile riunire in un'unica funzione $F_1(r)$ il termine $\frac{\partial F(r, \rho)}{\partial r} \Delta r$ con quello in Δr nell'espressione dell'azione molecolare, per ottenere la sua nuova forma (per unità di massa)

$$(II.5.3) \quad \phi = F(r + \Delta r, \rho + \Delta \rho) + F_1(r) \frac{\Delta r}{r}.$$

In questo modo, conclude l'autore, «dans un milieu isotrope peu écarté de son état primitif d'équilibre, l'action moléculaire se compose de deux forces: l'une, que j'appellerai de première espèce, ne varie qu'avec la distance actuelle des deux molécules considérées et la densité actuelle du milieu; la seconde, que j'appellerai de deuxième espèce, dépend de la

163 Boussinesq J., op. cit., p. 350.

distance primitive des deux molécules et du petit écartement qu'elles ont subi à l'époque actuelle»¹⁶⁴.

Questo risultato è davvero apprezzabile poiché in esso sembrano prender forma matematica le astratte convinzioni di Stokes a favore delle formule bi-costanti per l'isotropia. In effetti, le forze di prima specie non sarebbero chiamate in causa in corrispondenza di un movimento che non alteri la densità, poiché, come spiega Boussinesq, «pendant la durée d'un pareil mouvement, chaque particule de matière se trouve sensiblement en rapport avec la même quantité d'autres particules placées de même manière»¹⁶⁵; esse insomma, non impedendo scorrimenti di sorta, «constituent l'élasticité des fluides». Diverso è il caso delle forze di seconda specie, le quali, comunque vari la distanza tra due molecole, tendono a riportarla al valore iniziale ripristinando la loro posizione relativa; sono queste forze, «fonction de la distance initiale et de l'écartement, qui constituent la solidité».

Richiamando le prime ricerche sull'elasticità dei solidi di Navier e di Lamé e Clapeyron, Boussinesq ne ravvisa i limiti proprio nel fatto che i loro autori hanno considerato solo tali seconde azioni, ottenendo così «ces expressions des forces élastiques, à un seul coefficient, que plusieurs ont remplacées depuis par d'autres à deux coefficients distincts. On trouverait en effet celles-ci en ajoutant aux expressions anciennes et incomplètes des actions normales N la pression constante, fonction de la densité *actuelle*, que donnent les actions de première espèce, et qui introduirait, outre une partie principale, antérieure aux déplacements, un terme proportionnel à la petite dilatation [la dilatazione cubica Θ]»¹⁶⁶.

Questa conclusione riverbera da vicino quella di Rankine sul ruolo del coefficiente di fluidità J e, come quest'ultima, sembra difficilmente poter dar conto del caso generale dei corpi anisotropi: ci si domanda, ad esempio, in che modo le azioni di prima specie, connesse esclusivamente a dilatazioni lineari ed influenti quindi sui soli coefficienti d'elasticità diretta c_{iiii} e laterale c_{ijjj} , potrebbero rimuovere le tre relazioni di Cauchy del tipo $c_{ijik} = c_{ijjk}$, correlanti le componenti di tensioni σ_{ij} e σ_{ji} agli scorrimenti angolari γ_{ik} e γ_{jk} . Inoltre, sempre perché legata alle sole azioni di prima specie, la costante a indica azioni anteriori allo spostamento le cui risultanti possono fornire le eventuali componenti normali di autotensione, ma non quelle tangenziali.

164 Ibidem, p. 352.

165 Ibidem, p. 353.

166 Ibidem, p. 353.

II. 7. La teoria “matematica” dell'elasticità.

Pur privilegiando, come è nei nostri intenti, la discussione della teoria dell'elasticità nella sua impostazione molecolare, sarebbe impossibile, giunti a questo punto, eludere un qualsiasi accenno alle sorti dell'altra formulazione, quella che, muovendo dal “costrutto” di tensione in un corpo pensato come «masse continue», aveva condotto Cauchy a trarre tutte le conseguenze matematiche relative all'*analisi della tensione*, a riconoscere poi, nell'autonomo capitolo dell'*analisi della deformazione*, le prodigiose analogie formali nelle corrispondenti rappresentazioni geometriche in termini di quadriche di tensione e di deformazione e, infine, a stabilire il *legame* fra Statica e Geometria nella generalizzazione della legge di Hooke.

Apparentemente dimenticato e quasi sopraffatto dal lussureggiante proliferare della *Mécanique physique* alla Poisson¹⁶⁷, l'approccio continuista di Cauchy doveva attendere lo scompiglio generato dal nuovo “metodo di Green” e dalle sconcertanti esperienze di Wertheim per proporsi quale via realmente alternativa all'indirizzo “molecolare”, assumendo ben presto, alla luce della lettura in termini energetici, i connotati della moderna teoria “matematica” dell'elasticità. Non è forse un caso che questa eredità di Cauchy abbia trovato una prima ricezione in quello stesso ambiente anglosassone che abbiamo visto così riluttante verso l'iniziale tesi molecolarista: non tanto in Green, che quella tesi si era limitato a

¹⁶⁷ Fuori Francia, risultati perfettamente in accordo con i primi studi di Navier, Poisson e Cauchy sono stati raggiunti pressoché contemporaneamente da G. Lamé e B. P. E. Clapeyron (“Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes”, *Mém. présentés par divers savans*, 4, 465-562, 1833; il *Report* di presentazione fatto da Poinsot e Navier risale al 29 settembre 1828) durante il loro prolungato soggiorno in Russia, ove i due studiosi erano impegnati già dal 1824 nel campo ingegneristico e nell'insegnamento presso la Scuola per ingegneri di San Pietroburgo. **In Germania**, l'indirizzo molecolare ha raggiunto esiti analoghi nelle ricerche del primo Fr. Neumann (“Über das Elasticitätsmaass krystallinischer Substanzen der homoëdrischen Abtheilung”, *Annalen der Physik und Chemie*, 31, 177-192, 1834), benché il fisico tedesco abbia più tardi abbandonato le conclusioni ristrette della teoria molecolare (cfr. le *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität*, Leipzig, 1885, raccolte da O. E. Meyer, e i *Gesammelte Werke*, 2, 1906, curati dal figlio Carl). **In Italia**, dopo gli studi di meccanica molecolare ad opera di L. Nobili (*Introduzione alla Meccanica della materia*, Milano, 1819), di D. Paoli (*Ricerche sul moto molecolare dei solidi*, Pesaro, 1825), e di G. Belli (“Riflessioni sulla legge dell'attrazione molecolare”, *Opuscoli matematici e fisici di diversi autori*, 1, 25-68, 128-168, 237-261, 1832), risultati in connessione esplicita con la *Mécanique physique* di Poisson sono dovuti a G. Piola (“Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare”, *Memorie della Società italiana delle scienze di Modena*, 21, 155-321, 1836), sebbene lo stesso autore abbia trattato lo studio dei solidi da opposte premesse (“La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni”, *Opuscoli matematici e fisici di diversi autori*, 1, 201-236, 1832); anche O. F. Mossotti (*Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps aperçus pour servir à la détermination de la cause et des lois de l'action moléculaire*, Torino, 1836) si è affacciato agli studi di meccanica molecolare, tentando di estendere i risultati ottenuti da Franklin ed Epino in campo elettrostatico all'indagine sulla costituzione dei corpi, attraverso l'ipotesi di un fluido elastico nel quale le particelle materiali sarebbero immerse. **In Francia**, J. M. C. Duhamel ha esteso la teoria elastica di Poisson alla comprensione dei fenomeni termici (“Mémoire sur les équations générales de la propagation de la chaleur dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens”, *J. Éc. pol.*, 13, Cahier 21, 356-399, 1832; “Second mémoire sur les phénomènes thermo-mécaniques”, *J. Éc. pol.*, 15, Cahier 25, 1-57, 1837; “Mémoire sur le calcul des action moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides”, *Mém. prés. par divers savans*, 5, 440-498, 1838), mentre O. Bonnet (“Mémoire sur la théorie des corps élastiques”, *J. l'Éc. pol.*, Cahier 30, 171-191, 1845) ha abbracciato la teoria uni-costante nella deduzione delle equazioni dell'elasticità in coordinate curvilinee.

sospendere, sostituendola con un piú sicuro principio “necessitante” di natura matematica, quanto nelle già indicate posizioni di Rankine e, soprattutto, nella figura piú volte emergente di Thomson, autore di un breve ma significativo testo di “Elementi” di una teoria matematica dell'elasticità¹⁶⁸, il cui rigoroso impianto disvela in anteprima metodi e propositi fatti propri in opere ormai classiche, dalle *Vorlesungen* di Kirchhoff al *Treatise* di Love: quasi come in una dimostrazione matematica, quella succinta trattazione muove dalle essenziali *definizioni* di *stress* e *strain*, alle quali seguono *teoremi* e conseguenti *corollari* sulle loro distribuzioni ellissoidali, fino al conclusivo convergere nell'unificante interpretazione energetica.

Chi volesse cogliere questa fase di passaggio, in tutti gli aspetti contraddittori della faticosa quanto irrimediabile rottura col passato, non troverebbe esempio piú eloquente delle famose *Leçons* di Lamé del 1852: giustamente celebrate da Timoshenko come «the first book on theory of elasticity»¹⁶⁹ per la generalità dell'impostazione e la varietà dei problemi applicativi affrontati, esse conservano ancora irrisolto il retaggio dell'iniziale stagione di studi, della quale lo stesso Lamé era stato protagonista non secondario. È ben noto, ad esempio, come la tesi della bi-costanza vi sia convintamente abbracciata, tanto da imporre ai posteri l'appellativo “di Lamé” alle costanti elastiche λ e μ dei solidi isotropi: in effetti, a null'altro che a formule d'isotropia a due coefficienti possono ridursi le espressioni generali $\sigma_{ij} = c_{ijk} \varepsilon_{hk}$ quando le si semplifichi in base a pure considerazioni di simmetria, tratte dall'esame separato di una trazione e di una torsione uniformi¹⁷⁰; eppure, le prime tre *Leçons* sembrano una dichiarazione di fede a favore dell'ipotesi molecolare e delle sue conseguenze: in esse, non solo l'idea di azioni di contatto è negata come «pure illusion», per far propria la classica definizione di tensione in termini di azioni a distanza¹⁷¹, ma è ripercorsa in modo rigoroso l'usuale procedura per dedurre le componenti di tensione, in base alla quale la relazione $\lambda = \mu$ risulta forzatamente. Di fronte a questa uguaglianza però, Lamé oppone la falsa replica secondo la quale essa «s'appuie nécessairement sur l'hypothèse de la continuité

168 Thomson W., “Elements of a Mathematical Theory of Elasticity”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **146**, 481-498, 1856. Questo testo fa parte della voce “Elasticity” della nona edizione dell'*Encyclopaedia Britannica*, London-Edinburgh, 1878.

169 Timoshenko S. P., *History of Strength of Materials*, New York, 1983, p. 116. Reprint dell'edizione originale McGraw-Hill, 1953.

170 Lamé G., *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris, 1852, pp. 49-51.

171 Contro la definizione, «en apparence plus simple», per la quale la tensione è intesa come l'azione che si dovrebbe applicare su ogni elemento superficiale di un piano, immaginato all'interno di un corpo, per mantenere in equilibrio una delle sue metà qualora si pensasse di sopprimere l'altra, Lamé replica che «elle ne donne pas une idée bien nette de la force élastique», cioè della la tensione; per Lamé, infatti, «tous les effets qui ont lieu au contact des corps, et même le sens de toucher, ne peuvent s'expliquer d'une manière satisfaisante qu'en faisant concourir l'action mutuelle des couches internes» (p. 12).

de la matière»¹⁷², echeggiando in modo distorto la vecchia disputa fra Navier e Poisson, per poi appoggiare le sue convinzioni sui risultati sperimentali di Wertheim.

Questa ambiguità di fondo è risolta solo nelle successive *Leçons sur les coordonnées curvilignes* del 1859, nelle quali Lamé rigetta definitivamente l'«ancien principe» della teoria molecolare, in quanto «chaque partie, chaque mot de son énoncé donne lieu à un doute, déguise une hypothèse ou présuppose une loi»¹⁷³. Al contrario, una sana teoria dell'elasticità dovrà basarsi unicamente sulle equazioni d'equilibrio tratte dai teoremi fondamentali della meccanica razionale e sulle equazioni generali d'elasticità in termini di 36 coefficienti indipendenti: nel caso d'isotropia, l'applicazione dei *lemmi* di semplice trazione e semplice torsione fornirà poi le relazioni particolari bi-costanti, la deduzione delle quali sarà in tal modo «complètement dégagé de toute hypothèse, de toute idée preconçue»¹⁷⁴.

È interessante leggere la critica di Pearson di fronte a questa risoluta posizione di Lamé: «[h]is lemmas do not *definitely* appeal to any physical axiom, and we have, precisely as in the case of Green, the apparent miracle of the theory of an important phenomenon springing created from the brain of a mathematician without any appeal to experience. The physical axiom or hypothesis of molecular force which Lamé uses in his *Leçons sur l'élasticité* (...) is here dropped, and the only bridge over the void between the pure theory of quantity and the physical phenomenon is formed by these two lemmas, based upon consideration of simmetry, and a tacit assumption that the most sensible terms in stress are linear in strain»¹⁷⁵.

Le critiche di Pearson riflettono da vicino quelle mosse pochi anni prima a Clebsch da parte di Saint-Venant, in occasione della traduzione francese della *Theorie der Elasticität fester Körper*: l'autore tedesco dedurrebbe infatti la *linearità* delle componenti di tensione in quelle di deformazione «d'une sorte de nécessité mathématique, résultant de ce que ces six déformations élémentaires sont très petites, en sorte qu'on peut ne conserver que les termes affectés de leurs premières puissances, en négligeant les autres dans le développement des composantes de tension»¹⁷⁶. Di fronte a tali argomentazioni Saint-Venant aveva già portato un eloquente controesempio nel commento al Navier, mostrando che lo sviluppo di una

172 Ibidem, p. 51.

173 Lamé G., *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, 1859, p. 367.

174 Ibidem, p. 367.

175 Todhunter I. , Pearson K., op. cit., 1, p. 625.

176 Clebsch A., *Théorie de l'élasticité des corps solides, traduite par MM. Barré de Saint-Venant et Flamant, avec des Notes étendues de M. de Saint-Venant*, Paris, 1883, p. 39.

funzione non comincia necessariamente con la potenza unitaria della sua variabile¹⁷⁷. In realtà, la vera ragione della linearità andrebbe ricercata in una «loi assez générale, assez *grandiose*, c'est-à-dire simple, pour que nous puissions, en raisonnant comme faisait Leibnitz (...), la regarder comme pouvant être celle à laquelle le souverain Législateur a soumis les phénomènes intimes (...)»¹⁷⁸. Ora, questa legge, abbastanza grandiosa da poter ammettere di divina emanazione, è quella stessa che, «depuis Newton jusqu'à Clairaut, Laplace, Gauss, Ampère, Navier, Cauchy, Poisson, Coriolis, Poncelet, Neumann, Clausius, etc.»¹⁷⁹, considera le azioni molecolari funzioni continue della sola mutua distanza delle particelle fra le quali esse si esercitano; e se, in generale, una funzione non ammette che il primo termine del suo sviluppo sia lineare nelle sue variabili, diverso è il caso in cui quella funzione è la differenza dei valori corrispondenti alle differenze delle variabili dalle quali essa dipende. Se infatti tale dipendenza avviene con continuità, «la première différence varie proportionnellement à chacune des autres différences supposées très petites, et elle est, par conséquent, une fonction linéaire de toutes ces petites *différences* des valeurs des variables»¹⁸⁰. Ora, le tensioni σ_{ij} non sono altro che risultanti di azioni dovute agli spostamenti relativi dei punti materiali: esse, cioè, sono risultanti delle differenze tra le intensità iniziali e finali delle azioni molecolari dipendenti con continuità dalle variazioni di distanza fra le molecole e, poiché queste ultime variazioni sono esprimibili linearmente in termini delle deformazioni ϵ_{ij} , si riconosce che quella legge garantisce la ragione «à la fois *physique et mathématique*» della linearità delle formule, ciò che «un raisonnement seulement mathématique était impuissant à faire»¹⁸¹.

Con questa precisazione, Saint-Venant riafferma lo statuto *fisico* delle equazioni d'elasticità, a dispetto di chi, come Green e, in fondo, lo stesso Lamé, intendeva stabilirle in base a ragioni squisitamente *matematiche* sulle funzioni esprimenti la dipendenza tra tensioni

177 Saint-Venant aveva precisato questo aspetto per correggere la convinzione formulata da Poisson nella sua seconda memoria del 1831, ove, nell'affrontare per la prima volta lo studio dei corpi cristallizzati generalizzando i risultati del caso isotropo, egli aveva affermato, senza dimostrazione, che «les équations générales de l'équilibre (...) renfermeront trente-six coefficients, qu'on ne pourra pas réduire à un moindre nombre, sans restreindre la généralité de la question» (p. 85); non potendo certo accusare Poisson di noncuranza verso l'origine fisica dell'elasticità, Saint-Venant non ha però mancato di osservare che la forma *lineare* delle equazioni $\sigma_{ij} = c_{ijk} \epsilon_{hk}$ discende direttamente dalla legge delle forze funzioni della distanza, per la quale i coefficienti si riducono da 36 a 15. Il controesempio suggerito da Saint-Venant mostra che l'eccesso $e = h - 1$ dell'ipotenusa h di un triangolo rettangolo rispetto al cateto maggiore, supposto eguale a 1, è certamente funzione del cateto minore k , ma non funzione lineare quando quest'ultimo diviene piccolo: in tal caso si ha, infatti, $h = (1 + k^2)^{1/2} = 1 + k^2/2$; reciprocamente, il cateto k è funzione dell'eccesso $e = h - 1$ ma non risulta lineare in tale differenza quando essa diviene piccola, poiché si ha $k = 2e^{1/2}$.

178 Clebsch A., op. cit., *Note* al §11, p. 41.

179 *Ibidem*, p. 41.

180 *Ibidem*, p. 41.

181 *Ibidem*, p. 42.

e deformazioni. Ma un'altra ben piú rilevante obiezione si levava contro il ricorso ad ipotesi matematiche, come intenderemo fra breve percorrendo la successiva *Note* apposta all'edizione francese del Clebsch.

II. 8. Le ragioni di Saint-Venant.

La linea argomentativa sostenuta nel precedente passaggio del “Clebsch” con l'esaltazione della «grande loi» nasconde il punto forte del pensiero di Saint-Venant, quello nel quale crediamo risieda la ragione di fondo della sua difesa ad oltranza delle conseguenze della teoria molecolare. In effetti, solo tenendo fede a quella legge, per la quale le azioni molecolari sarebbero funzioni della *sola distanza* fra ogni coppia di particelle, intese come punti materiali privi d'estensione, Saint-Venant vedeva la possibilità di salvaguardare, entro il sistema di Boscovich, il vecchio progetto di d'Alembert e Carnot alla cui edificazione egli stesso aveva offerto piú di un contributo¹⁸².

¹⁸² Discutendo il “tradimento” ideale col quale Boussinesq aveva preso le distanze dal maestro, ammettendo la possibilità di “azioni di presenza”, abbiamo già riconosciuto l'impegno di Saint-Venant in questa direzione con il “Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la Mécanique” (*Comptes rendus*, 21, II sem., 620-625, 1845): in esso, l'intento di eludere il ricorso all'idea di forza come causa efficiente del moto, lo aveva condotto, da un lato, alla ricordata interpretazione in termini di composizione geometrica della “legge di simultaneità” $\frac{dv}{dt} = F + F_1 + F_2 + \dots$, dall'altro, ad anticipare Mach riconoscendo la possibilità di definire la massa attraverso le variazioni di velocità che hanno luogo a seguito di urti fra i corpi, «sans qu'il soit question de force ni de quantités de matière» (p. 624). Di fronte alle obiezioni di chi lo accusava di aver ridotto a puro *nulla* la realtà fisica, abolendo le forze dopo aver ammesso la materia composta di punti inestesi (nel citato “Mémoires sur la question de savoir ...” 1844), Saint-Venant dovette sentirsi chiamato a una risposta. In alcune preziose annotazioni manoscritte, apposte a margine e in fogli acclusi, su un'estratto del suddetto “Mémoire sur la question de savoir ...” custodito presso la Biblioteca di Matematica dell'Università di Genova, egli ribadisce la sua adesione al sistema di Boscovich ed afferma che «on n'échappe de toute manière à la négation des corps qu'en reconnaissant une existence probable aux simples points doués seulement de localité et de mobilité suivant des lois, sans y ajouter nécessairement l'étendue finie et la force, qui ne sont que dérivés de la localité et de la mobilité»: posizione e movimento sono dunque elementi sufficienti del vocabolario della meccanica, e se non si apprezza ancora «le comment de toute chose, ce n'est point une raison pour ajouter, a ce que la science nous apprend, des attributs de notre création», quali sarebbero forza ed estensione (per una recensione critica dell'estratto annotato e della sua collocazione nel piú generale orizzonte culturale di Saint-Venant, cfr. Benvenuto E., Becchi A., “Sui principi di filosofia naturale che orientarono la ricerca di Saint-Venant”, in *Omaggio a Giulio Ceradini*, 125-133, Roma, 1988). Un altro significativo contributo nella direzione qui discussa è rappresentato dai *Principes de mécanique fondés sur la cinématique* (1851): concepito appositamente come supporto didattico per il modesto uditorio degli allievi dell'Institut National Agronomique, questo testo segna un primo episodio importante, benché inizialmente non riconosciuto, della discussione critica sui principi della meccanica emergente sullo scorcio del XIX secolo, divenendo, come ha osservato Padé ricordando i lavori di Boltzmann, Mach, Helmholtz e Hertz, «l'objet de l'attention des géomètres les plus éminents, et mise au rang des tentatives les plus sérieuses faites actuellement pour jeter quelque clarté sur les obscures principes de la Mécanique (Padé H., “Barré de Saint-Venant et les principes de la Mécanique”, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 15, 761-767, 1904). Questo apprezzamento, confermato dal giudizio piú recentemente emesso da M. Jammer (*Storia del concetto di forza. Studio sulle fondazioni della dinamica*, Milano, 1971, pp. 228-230 (ed. inglese 1957)) è un motivo di piú per cercar di capire

Ora però, annota Saint-Venant proseguendo l'argomentazione sulla legge delle forze, «Green et, d'après lui, divers savants de l'Angleterre et de l'Allemagne ont cru pouvoir lui en substituer une autre plus générale, ou qualifiée de plus générale parce qu'elle est *moins déterminée* (...), loi dont la conséquence analytique immédiate est la possibilité que l'intensité de l'action entre deux molécules dépende non seulement de leur distance mutuelle propre, mais encore de leurs distances aux autres molécules, et même des distances de celles-ci entre elles; en un mot, de tout l'ensemble actuel de leurs situations relatives ou de l'état présent complet du système dont font partie les deux molécules, dût-on l'étendre à l'univers entier»¹⁸³.

Di fronte a questa vana astrattezza spacciata per maggior generalità, accettando la quale verrebbe corrotta la limpidezza geometrica riflessa nella legge di simultaneità, il vecchio scienziato oppone una critica minuziosamente edificata sul terreno dello stesso Green e coinvolgente, in modo indiretto, le analoghe pretese di Boussinesq. Muovendo dalle equazioni del moto del punto materiale di massa m

$$(II.8.1) \quad m \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial r} n_i$$

dedotte da quest'ultimo¹⁸⁴ a partire dal principio di conservazione dell'energia

$$(II.8.2) \quad \frac{1}{2} \sum m v^2 + \Phi(r, r', r'', \dots) = C \quad (C \text{ costante})$$

Saint-Venant osserva che, assumendo l'ipotesi «jusqu'ici admise» per la quale la funzione potenziale ha la forma additiva

$$(II.8.3) \quad \Phi(r, r', r'', \dots) = F(r) + F_1(r') + F_2(r'') + \dots,$$

la forza totale sollecitante il punto materiale m si compone di azioni dirette secondo le sue congiungente r, r', r'', \dots e di intensità $F'(r) = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$, $F'_1(r') = \frac{\partial \Phi}{\partial r'}$, $F'_2(r'') = \frac{\partial \Phi}{\partial r''}$ etc.; allora, il lavoro complessivo Φ sviluppato nel passaggio fra due stati del sistema di punti materiali, è la somma dei lavori $\int F'(r) dr$, $\int F'_1(r') dr'$, $\int F'_2(r'') dr''$, etc. di ciascuna forza: «c'est, comme on sait, seulement aux forces qui suivent cette loi que l'on reconnait, dans les traités de mécanique, la propriété de donner un travail qui soit à chaque instant un *différentielle exacte*

le ragioni dell'ostinata opposizione di Saint-Venant al rigetto della teoria molecolare nella sua originaria formulazione.

183 Clebsch A., *Note* al §11, p. 41.

184 Boussinesq J., *op. cit.*, pp. 313-316.

$d\Phi$; et c'est seulement pour elles que l'on démontre l'équation [(II.8.2)] en partant de la notion de la *composition* géométrique des forces motrices sur chaque point»¹⁸⁵.

Ora, fra le «conséquences singulières» calanti dal rigetto della forma (II.8.3), Saint-Venant riconosce la possibilità stessa del “moto perpetuo” sulla cui negazione Green aveva basato le sue deduzioni, poiché, in generale, il lavoro $\int R(r, r', r'', \dots) dr$ della forza $R(r, r', r'', \dots)$ tra due molecole m, m' , dipendente ora da tutte le distanze r, r', r'' etc., non potrà più essere nullo in un ciclo completo. In effetti, all'istante $t = t_2$ della fase di ritorno, in cui la distanza mm' avrà ripreso il valore r che aveva avuto ad un generico istante $t = t_1$ della fase di andata, i due punti m, m' si troveranno, rispetto agli altri punti, a distanze diverse da quelle corrispondenti all'istante $t = t_1$. In tal caso, l'azione $R = R_2$ (per $t = t_2$) sarà diversa da quella $R = R_1$ (per $t = t_1$), ed il lavoro $R_1 dr$ per un incremento dr della distanza al tempo $t = t_1$ non potrà essere uguale (a meno del segno) al lavoro $-R_2 dr$ per un decremento dr al tempo $t = t_2$. La conclusione è ovvia: «la nullité du travail total produit par un cycle ne peut donc être générale qu'autant qu'elle a lieu *pour chaque action individuelle*; ce qui oblige à admettre que la force R soit fonction *de la seule distance r* »¹⁸⁶.

Questa conclusione, a tal punto stringente da indurre Saint-Venant a ritenere che lo stesso Green vi credesse «sans s'en rendre compte», è poi quella medesima alla quale si perviene «*en n'envisagent le mouvement que d'une manière cinématique ou en ne considérant que ses lois et non ses causes*»¹⁸⁷; le equazioni (II.8.1) affermano infatti che i *prodotti cinematici* della massa m di ogni punto per la sua accelerazione sono scomponibili poligonalmente nelle quantità $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ riportate sulle congiungenti r di m con gli altri punti. Ecco, allora, che le considerazioni riferite alle azioni molecolari si applicano, «en ne changent que les mots», alle componenti geometriche dei prodotti delle masse per le rispettive accelerazioni, esattamente come esse compaiono nell'espressione della «loi générale de simultanéité» $m \frac{dv}{dt} = F + F_1 + F_2 + \dots$. La conclusione è inappellabile: «j'affirme hardiment, et tout le monde, j'en suis convaincu, pensera comme moi, qu'il faudra absolument adopter la forme

$$(II.8.4) \quad \Phi(r, r', r'', \dots) = F(r) + F_1(r') + F_2(r'') + \dots \text{ »}^{188}.$$

185 Clebsch A., *Note finale* al §16, p. 70.

186 Ibidem, p. 71.

187 Ibidem, p. 73.

188 Ibidem, p. 72. Questa conclusione era già stata implicitamente espressa nel citato lavoro “De la constitution des atomes”, (*Ann. Soc. sc. Bruxelles*, 2, 1877-'78), ove Saint-Venant discute le conseguenze dell'ipotesi di Green sulla forma del potenziale: «[o]n remarquera qu'il s'ensuivrait que la force *totale* qui sollicite une particule n'est pas exactement la résultante géométrique, composée par la règle statique du

Il cerchio è in tal modo chiuso e con ciò è garantita la possibilità di conservare intatta la coerenza del grandioso edificio, eretto in tanti anni di appassionata ricerca. A qual prezzo, però. È pur vero, infatti, che, negando ogni apertura che allargasse gli orizzonti del “possibile”, la fedeltà assoluta al modello di Boscovich mostrava tutti i limiti di quella “immagine del mondo”. Così è tuttavia, ogni qualvolta le ipotesi ideali che lo scienziato introduce lungo il suo percorso divengono l'espressione stessa della realtà. Affinché ciò sia incontestabile, osserverà sommessamente, ma a ragione, Boussinesq nel discorso di commiato al defunto maestro, «il faudrait supposer (...) que notre faculté de représentation du monde extérieure s'accorde assez bien avec la réalité physique pour que sa compétence doive être admise sans restriction, jusque dans l'étude des derniers détails des objets»¹⁸⁹.

Come noto, la storia a venire avrebbe dato torto a Saint-Venant: non solo, infatti, l'adozione sistematica di principi “necessitanti” di natura matematica ha consentito i maggiori progressi dell'odierna meccanica razionale, ma gli sviluppi della stessa fisica dello stato solido hanno rivelato, alla luce della trattazione quanto-meccanica¹⁹⁰, che il comportamento della materia è formalmente interpretabile solo ammettendo l'origine delle forze di coesione da potenziali a molti corpi, nel senso da Green sottinteso.

II. 9. Sguardo sull'opera di Saint-Venant.

Prima di abbandonare definitivamente la figura di Saint-Venant, in ciò seguendo l'atteggiamento della letteratura successiva, assai avara di riferimenti agli interessi atomistici dello scienziato francese, vorremmo ancora soffermarci brevemente sulla sua singolare vicenda di studioso, ricordando i principali contributi caratterizzati dall'esplicita adesione alla

parallélogramme ou du polygone que l'on connaît, de toutes les forces avec lesquelles la solliciteraient séparément les autres particules si chacune existait seule avec elle, comme on l'a cru jusqu'à nos jours» (p. 433). Riportiamo questa citazione anche per correggere una sua erronea lettura data da Jammer (op. cit., p. 145) per la quale l'ipotesi di Green è attribuita allo stesso Saint-Venant: ciò che è singolare, dato che Jammer menziona appena prima i *Principes de mécanique fondés sur la cinématique*.

¹⁸⁹ Boussinesq J., Flamant A. A., *Notice sur la vie et les travaux de Barré de Saint-Venant*, Paris, 1886, p. 21.

¹⁹⁰ Löwdin P. O., *A theoretical investigation into some properties of ionic crystals. A quantum mechanical treatment of the cohesive energy, the interionic distance, the elastic constants, and the compression at high pressures with numerical applications to some alkali halides*, Uppsala, 1948; “A quantum mechanical calculation of the cohesive energy, the interionic distance, and the elastic constants of some ionic crystals”, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, **35 A**, 1-10, 1948; II, “The elastic constants c_{12} and c_{44} ”, *Idem*, **30**, 1-18; Lundqvist S. O., “On the limiting vibrational frequencies of a cubic ionic lattice”, *Arkiv för Fysik*, **9**, 435-456, 1955.

tesi molecolare per tentar di coglierne alcuni spunti in grado, forse, di offrire una visione meno univoca della sua ricerca teorica.

Abbiamo già menzionato i ripetuti interventi (1837, 1844, 1845) volti a precisare il concetto di tensione, secondo la definizione offerta inizialmente da Cauchy, riconoscendo, poi, la professione di fede verso l'ipotesi atomistica dichiarata nel “Mémoire sur la question de savoir ...” (1844) e segnalando, infine, una prima difesa delle formule d'isotropia uni-costanti in una replica (1849) alle conclusioni di Wertheim. A questi sparsi contributi, suggeriti da particolari circostanze o dall'esigenza di chiarimenti su aspetti specifici, doveva sostituirsi, dalla metà degli anni '50, l'esplicita volontà di dar forma sistematica all'esposizione dei fondamenti teorici della meccanica molecolare.

Non è forse un caso che tale proposito emerga in occasione delle due grandi memorie sulla torsione e sulla flessione dei prismi¹⁹¹, quasi a sottintendere la necessità d'inscrivere la trattazione dei problemi applicativi entro la rigorosa formulazione molecolare dell'elasticità. Certo, non è così, e lo stesso Saint-Venant ebbe l'avvertenza di lasciar distinti, nelle formule che governano il suo “problema”, i coefficienti che le relazioni di Cauchy vorrebbero eguali; tuttavia, un'illusione in tal senso è confermata da convincimenti espressi in seguito, secondo i quali, «*pour le recherches analytiques*», si potrà certo tenere distinti i due coefficienti «*qu'on sait être égales*», ma, «*dans les autres cas où l'on passe à la pratique (...), c'est-à-dire dans les cas où il y a lieu de calculer des effets simultanés de flexion, torsion, extension, glissement (...), il faut réduire les coefficients au moindre nombre*»¹⁹². È soprattutto nel “Mémoire sur la torsion des prismes ...” che l'orizzonte espositivo assume la fisionomia del trattato, passando dalla meticolosa descrizione geometrica della deformazione (anche finita)¹⁹³, all'analisi delle proprietà della tensione, dall'originale deduzione delle formule generali calanti dalla sua definizione, al loro studio con riferimento ai casi particolari d'anisotropia.

Gli esiti più cospicui di questa volontà sistematizzante vanno però rintracciati negli straordinari commenti al Navier (1864) ed al Clebsch (1883), nonché nell'intermedio contributo alle *Leçons de Mécanique analytique* dell'Abbé Moigno (1868).

¹⁹¹ Barré de Saint-Venant A. J. C., “Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance a divers efforts s'exerçant simultanément”, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France*, **14**, 233-560, 1855, in particolare pp. 236-277, 1856; “Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissement transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, II sér., **1**, 89-189, 1856, in particolare, pp. 101-111.

¹⁹² Cfr. V Appendice al Navier, pp. 758-760.

¹⁹³ Lo studio delle deformazioni finite era già stato affrontato da Saint-Venant in *L'Institut*, n°537, 1844 e in *Comptes rendus*, **26**, 260-263, 1847.

Del Clebsch abbiamo già abbondantemente riferito percorrendo le *Notes* ai paragrafi 11 e 16 del testo, ove peraltro si incentrano le argomentazioni per noi salienti. Al Moigno si è fatto più di un richiamo, riprendendone la linea deduttiva sfociante nelle (I.4.8-9) e discutendo i limiti della trattazione di Navier sullo stato naturale (cfr. I.5): d'altra parte, le due *Leçons* (XXI e XXII) che Moigno destinò a Saint-Venant nell'esplicito intento di un'agiografia del maestro Cauchy, non offrono nulla di sostanzialmente originale, costituendo piuttosto una "controllata" sintesi dei contenuti già esposti nelle *Appendici* al Navier. È in quest'ultima opera, invece, che Saint-Venant mostra tutto sé stesso, disvelando valenze e limiti del suo pensiero sin dall'*Historique abrégé*, dove la penetrante analisi storica non riesce a dissimulare una lettura dei fatti in qualche modo viziata dal pregiudizio atomistico, per il quale la meccanica si sarebbe costituita come scienza geometrica dopo aver associato indissolubilmente l'idea di forza a quella di distanza relativa tra le parti ed averla poi ricondotta al rispetto della «grande loi des actions moléculaires». È da questo pregiudizio che discende la reiterata presa di posizione assunta nella *V Appendice* contro la vana astrattezza di Green e gli apriorismi di Maxwell, ed è ancora ad esso che si deve la quasi patetica ricerca di conferme sperimentali in dati troppo spesso sconfessanti, da rigettare, allora, in nome di presunti difetti d'isotropia nei materiali di prova. Eppure, la splendida riscrittura della «*nouvelle branche de la Mécanique*» portata a compimento nella *III Appendice* conserva tutto il fascino di una grandiosa costruzione, e non si può forse negare a Saint-Venant d'esser giunto, nella ricchezza delle osservazioni e nella completezza delle argomentazioni, laddove altri non hanno potuto.

Non è tutto, però. Nella sua strenua negazione delle formule bi-costanti, Saint-Venant non si è limitato a contrapporre sterilmente l'infallibile applicabilità di quelle ad un solo coefficiente. Dietro all'adagio «l'isotropie est rare», si cela in realtà un impegno assiduo a ricercare plausibili ragioni fisiche al fallimento sperimentale delle relazioni uni-costanti. In una serie di lavori elaborati nel corso degli anni '60 sviluppando le analoghe ricerche di Rankine (1856) sulla distribuzione delle elasticità attorno ad un punto qualunque $M(x_1, x_2, x_3)$ di un solido, egli era pervenuto a definire le espressioni dei coefficienti elastici $c_{ij' h' k'}$, riferiti agli assi $x_{1'}$, $x_{2'}$, $x_{3'}$, in funzione di quelli c_{ijkl} , riferiti agli assi x_1, x_2, x_3 , attraverso la formula simbolica

$$(II.9.1) \quad c_{ij' h' k'} = c_{i'} c_{j'} c_{h'} c_{k'}$$

ove $c_{i'} = c_1 n_{i'1} + c_2 n_{i'2} + c_3 n_{i'3}$, in cui c_1, c_2, c_3 sono puri simboli, i cui prodotti quadrupli presenti nella (II.9.1) danno i coefficienti c_{ijkl} quando si pongano gli indici in successione secondo l'ordine imposto dalla stessa formula. Ad esempio, si ha

$$c_{11111} = c_1 \cdot c_1 \cdot c_1 \cdot c_1 = (c_1 n_{i1} + c_2 n_{i2} + c_3 n_{i3})^4,$$

per cui, riportando dal punto M in direzione x_1 la lunghezza $(c_{11111})^{-1/4}$, si deduce che le coordinate del suo secondo estremo sono

$$x_1 = n_{i1} (c_{11111})^{-1/4}, \quad x_2 = n_{i2} (c_{11111})^{-1/4}, \quad x_3 = n_{i3} (c_{11111})^{-1/4},$$

e si perviene, sostituendo il valore dei coseni direttori $n_{i1} = x_1 (c_{11111})^{1/4}$, $n_{i2} = x_2 (c_{11111})^{1/4}$, $n_{i3} = x_3 (c_{11111})^{1/4}$, all'equazione simbolica del quarto ordine

$$1 = (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)^4.$$

Nel caso in cui $x_2 x_3$, $x_3 x_1$, $x_1 x_2$ sono tre piani di simmetria, tale superficie si riduce alla forma

$$(II.9.2) \quad 1 = c_{1111} x_1^4 + c_{2222} x_2^4 + c_{3333} x_3^4 + 2(2c_{2323} + c_{2233}) x_2^2 x_3^2 + 2(2c_{3131} + c_{3311}) x_3^2 x_1^2 + 2(2c_{1212} + c_{1122}) x_1^2 x_2^2,$$

presentante, in generale, tredici massimi o minimi per c_{11111} , riducibili a tre quando la superficie diviene un ellissoide e valgono quindi le due possibili serie di relazioni

$$(II.9.3) \quad 2c_{2323} + c_{2233} = \sqrt{c_{2222} c_{3333}}$$

$$2c_{3131} + c_{3311} = \sqrt{c_{3333} c_{1111}}$$

$$2c_{1212} + c_{1122} = \sqrt{c_{1111} c_{2222}}$$

$$(II.9.4) \quad 2c_{2323} + c_{2233} = \frac{c_{2222} + c_{3333}}{2}$$

$$2c_{3131} + c_{3311} = \frac{c_{3333} + c_{1111}}{2}$$

$$2c_{1212} + c_{1122} = \frac{c_{1111} + c_{2222}}{2}$$

«Ce cas», osserva Saint-Venant in un estratto delle sue nuove ricerche, «est remarquable (...) parce que ce genre de contexture élastique doit être ou exactement ou très-approximativement, comme un calcul le prouve, celui des corps dont l'isotropie primitive a

été altérée par des rapprochement ou écartements moléculaires opérés inégalement en divers sens»¹⁹⁴. L'idea nuova di Saint-Venant consiste nell'ammettere che solidi quali i metalli e gli altri materiali da costruzione, denominati amorfi o a cristallizzazione confusa per il fatto che «les molécules affectent indistinctement toutes les directions», derivino la loro anisotropia dai processi di lavorazione. Sottoposta al calcolo¹⁹⁵ supponendo che le tre direzioni principali in ogni punto di un corpo inizialmente isotropo subiscano delle dilatazioni positive o negative $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, tale idea conduce esattamente alle relazioni di amorfismo (II.9.3) quando si metta in conto come variano le azioni molecolari nelle tre direzioni suddette.

In uno studio di poco successivo¹⁹⁶, Saint-Venant si appella ai giudizi di Savart e Regnault sulla rarità dell'isotropia, «même dans les solides *coulés*», per difendere la correttezza delle formule uni-costanti, «qui sont la conséquences obligées et rigoureuses de la loi des actions moléculaires *que tout le monde invoque ouvertement ou tacitement*», e proporre in loro vece, quando l'esperienza non le confermi, quelle a tre coefficienti

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= 3 \frac{c_{3131} c_{1212}}{c_{2323}} \varepsilon_{11} + c_{1212} \varepsilon_{22} + c_{3131} \varepsilon_{33} & \sigma_{23} &= c_{2323} \gamma_{23} \\
 \sigma_{22} &= c_{1212} \varepsilon_{11} + 3 \frac{c_{1212} c_{2323}}{c_{3131}} \varepsilon_{22} + c_{2323} \varepsilon_{33} & \sigma_{31} &= c_{3131} \gamma_{31} \\
 \sigma_{33} &= c_{3131} \varepsilon_{11} + c_{2323} \varepsilon_{22} + 3 \frac{c_{2323} c_{3131}}{c_{1212}} \varepsilon_{33} & \sigma_{12} &= c_{1212} \gamma_{12}
 \end{aligned}
 \tag{II.9.5}$$

¹⁹⁴ Barré de Saint-Venant A. J. C., "Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope", *Comptes rendus*, **56**, I sem., 475-479, 1863, p. 477. Le (II.9.4) sono equivalenti alle (II.9.3) a meno delle differenze $\frac{1}{2}(\sqrt{c_{2222}} - \sqrt{c_{3333}})^2$, $\frac{1}{2}(\sqrt{c_{3333}} - \sqrt{c_{1111}})^2$, $\frac{1}{2}(\sqrt{c_{1111}} - \sqrt{c_{2222}})^2$, trascurabili quando le compressioni non hanno apportato che delle piccolissime differenze nelle elasticità secondo diverse direzioni.

¹⁹⁵ Barré de Saint-Venant A. J. C., "Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, II sér., **8**, 257-295; 353-430, 1863; in particolare pp. 374-380. L'interesse verso una rigorosa definizione dei corpi amorfi è manifestata da una successiva memoria intitolata "Formules de l'élasticité des corps amorphes que des compressions permanentes et inégales ont rendus hétérotropes" (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, II sér., **13**, 242-254, 1868): in essa Saint-Venant si è prefisso di ritrovare le relazioni d'amorfismo (II.9.3-4), «sans invoquer cette loi moléculaire aujourd'hui controversée», eguagliando i nove coefficienti (riducibili a sei per le relazioni di Cauchy) delle formule valide per corpi con tre piani di simmetria agli sviluppi secondo le potenze e i prodotti interi delle tre compressioni $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, subite dalla materia inizialmente isotropa, e stabilendo le relazioni che devono sussistere tra i diversi moltiplicatori di tali potenze e prodotti trascurando poi i termini affetti dai quadrati $(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2, (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2, (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2$ delle differenze due a due delle compressioni.

¹⁹⁶ Barré de Saint-Venant A. J. C., "Mémoire sur les divers genres d'homogénéité des corps solides, et principalement sur l'homogénéité *semi-polare* ou cylindrique, et sur les homogénéités *polaires* ou sphéronique et spherique", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, II sér., **10**, 297-349, 1865; apparso in estratto in *Comptes rendus*, **50**, I sem., 930-934, 1860, senza riferimento ai corpi amorfi.

«suffisent pour tous les corps amorphes, et par conséquent pour tous les matériaux employés dans les constructions et les machines. Elles devraient être généralement employées, en abandonnant ces formules fautives d'isotropie à deux paramètres, par lesquelles quelques auteurs ont cherché (...) à interpréter divers faits»¹⁹⁷. Ecco, dunque, la massima concessione fatta ai detrattori della teoria molecolare: non l'abolizione delle perfette formule uni-costanti, ma l'adozione, se del caso, di quelle relative ai corpi amorfi, per le quali Saint-Venant si preoccupò anche di suggerire i modi per determinarne i parametri d'elasticità¹⁹⁸.

Purtroppo però, queste conclusioni sono fondamentalmente errate poiché i corpi amorfi, nell'accezione di Saint-Venant, sono in realtà degli assemblaggi di cristalli a struttura regolare casualmente orientati in ogni punto del corpo in modo tale da distruggere l'anisotropia dei singoli componenti. Questa idea, che abbiamo già riconosciuto in Clausius e che lo stesso Savart¹⁹⁹ aveva suggerito, sarà pochi anni dopo eretta da Voigt a base della sua teoria dei solidi *quasi-isotropi*, quali sono i metalli e le pietre policristalline.

Prima di occuparci di questi nuovi e fondamentali indirizzi della ricerca emergenti alla fine del secolo, vogliamo ancora ricordare alcuni scritti minori, ma di rilievo ai nostri fini, i quali, alternati ai vecchi interessi d'idrodinamica e alle innovative ricerche sulla plasticità, da un lato, e agli studi di carattere applicativo sull'urto longitudinale di barre elastiche e sulla spinta delle terre, dall'altro, occuperanno la mente dell'anziano maestro negli ultimi lustri della sua lunga carriera scientifica.

A fianco di una brillante interpretazione in termini molecolari della deformazione termica, sfociante nella dipendenza del coefficiente di dilatazione dalla derivata seconda della funzione delle forze²⁰⁰, sono per noi di particolare interesse alcuni spunti auspicanti un possibile superamento del modello di Boscovich, volto ad abbracciare l'idea di “molecola integrante” sulla quale si era già soffermato Cauchy. Senza rinnegare l'inestensione dei punti

197 Ibidem, p. 306.

198 Barré de Saint-Venant A. J. C., “Des paramètres d'élasticité des solides, et de leur détermination expérimentale”, *Comptes rendus*, **86**, I sem., 781-785, 1878.

199 Todhunter e Pearson (*History*, **1**, pp. 173-174) riportano un passo delle “Recherches sur la structure des métaux” (*Ann. ch. ph.*, **41**, 61-75, 1829) in cui Savart osserva che «les métaux seraient comme certains cristaux groupés, dont chacune, considéré en particulier, offre une structure régulière, tandis que la masse entière paraît tout-à-fait confuse».

200 Barré de Saint-Venant A. J. C., “Sur la manière dont les vibrations calorifiques peuvent dilater les corps, et sur le coefficient des dilatations”, *Comptes rendus*, **82**, I sem., 33-39, 1876. Riprendendo l'idea espressa già nel 1855 (“Diverses considérations sur l'élasticité des corps, sur les actions entre leurs molécules, sur leurs mouvements vibratoires atomiques et sur leur dilatation par la chaleur”, *L'Institut*, **23**, 440-442, 1855), per la quale gli effetti termici sarebbero connessi alle vibrazioni atomiche, Saint-Venant osserva che, se non si tenesse conto della diversa curvatura della funzione delle forze in corrispondenza della distanza d'equilibrio, sarebbe impossibile intendere la dilatazione prodotta da un aumento di temperatura, come ribadito nell'articolo “Sur la dilatation des corps échauffés et sur les pressions qu'ils exercent”, *Comptes rendus*, **87**, II sem., 713-718, 1878.

dai quali ognuna di esse sarebbe costituita in assemblaggi poliedrici, ribadita ancora in occasione di una nota di Berthelot a favore dell'indivisibilità dell'atomo esteso²⁰¹, Saint-Venant ripropose il riferimento alle “molecole integranti” nella stessa *Note finale* del Clebsch ove aveva combattuto l'idea di Green. Confermando la convinzione che «les actions entre *atomes* sont régies par la loi des intensités fonctions des seules distances où elles s'exercent», egli mise in dubbio la certezza che «les actions *résultantes*, ou entre *molécules*, doivent suivre tout à fait la même loi vis-à-vis des distances de leurs centres de gravité. On peut considérer aussi que les groupes, en changeant de distances, peuvent changer d'orientation»²⁰².

Non sappiamo se quest'idea, implicante il sostanziale superamento della vecchia teoria per la possibilità di rotazioni mutue fra le molecole integranti, fosse convinzione sinceramente maturata da Saint-Venant, come Boussinesq sembra far intendere in un passaggio della citata “Notice”²⁰³. Di certo, l'ultima dichiarazione al riguardo lascia intendere altrimenti; richiesto da Pearson se fosse ancora favorevole alla teoria rari-costante, l'anziano studioso rispondeva, in una lettera del settembre 1885, a pochi mesi dalla morte: «oui pour les vrais solides (supposés isotropes) comme sont les métaux ordinairement, ainsi que le marbre, le verre; mais *non* si l'on veut absolument par un motif quelconque que je ne conçois guère, appliquer les formules de l'élasticité au caoutchouc, aux gommés molles, aux gelées, et aux autres corps mous et élastiques, car ces corps-là ne sont que les mélanges de tissus cellulaires, de membranes élastiques, et de fluides visqueux que leurs cellules contiennent»²⁰⁴.

II. 10. Le modellazioni di Thomson sui reticoli cristallini.

Nel paragrafo iniziale di questo capitolo abbiamo accennato al tentativo col quale Thomson si era proposto, fin dal 1856, di mettere a punto un modello meccanico conformato alle ipotesi della teoria molecolare, eppur in grado di mostrare la fallacia delle sue conclusioni in relazione al numero dei coefficienti elastici. Con quel modello, uno dei tanti ai

201 Barré de Saint-Venant A. J. C., “Sur la constitution atomique des corps”, *Comptes rendus*, **82**, I sem., 1223-1226, 1876.

202 Cfr. *Note finale* al §16 del Clebsch, p. 74.

203 Boussinesq J., Flamant A. A., op. cit., p. 19.

204 Todhunter I., Pearson K., op. cit., **1**, p. 504.

quali era uso far riferimento per concepire una rappresentazione del reale nel quadro del suo riduzionismo meccanicista, Thomson intendeva soddisfare una precedente promessa fatta a Stokes col proposito di dimostrare, conformemente ai convincimenti dello stimato collega, la possibilità di far variare indefinitamente il grado di compressibilità di un solido, ferma restando la sua rigidità a taglio.

Questo proposito, rimasto latente per quasi trent'anni, durante i quali Thomson si era dimostrato riluttante verso gli esiti atomistici non solo nel campo dell'elasticità dei solidi, doveva riemergere col finire del secolo sull'onda del mutato convincimento secondo cui «we are forced to views regarding the atomic origin of all things closely resembling those presented by Democritus, Epicurus and Lucretius»²⁰⁵. Questa nuova posizione, che avrebbe portato lo scienziato a rivedere le sue convinzioni sull'elettricità nell'«Epino atomizzato» e ad introdurre l'idea di *elettrione* nel modello atomico di J. J. Thomson, si riflette, nell'area di nostro interesse, attraverso il recupero della dottrina di Boscovich, un tempo rigettata, e nel suo arricchimento sulla base delle speculazioni intorno ai reticoli cristallini inizialmente studiati da Bravais²⁰⁶.

Per la verità, il modello presentato a mantenimento dell'antica promessa nella *XI* delle *Baltimore Lectures* precede di qualche anno gli studi sugli assemblaggi regolari di punti formanti la struttura dei cristalli, benché si collochi quale loro ineludibile premessa. Per raggiungere lo scopo prefissosi, Thomson osserva che gli otto punti di spigolo di un parallelepipedo, ciascuno corrispondente ad una particella, possono essere collegati lungo i 12 spigoli del solido, lungo le 12 diagonali sulle facce di questo e lungo le 4 diagonali al suo interno. In un assemblaggio di otto simili parallelepipedi, ogni spigolo appartiene a quattro parallelepipedi ed ogni diagonale di faccia a due, per cui restano disponibili $3 + 6 + 4 = 13$ legami fra i punti di spigoli, ovvero 13 costanti arbitrarie definite dalle rigidità di quei legami. Due ulteriori costanti provengono poi dai rapporti dei tre lati ed altre tre dalle direzioni assumibili per gli assi di riferimento: «[t]hus we have in all 18 disposables. But these (...) cannot give us 18 independent modules because it is obvious that they cannot give us infinite resistance to compression with finite isotropic rigidity, a case which is essentially included in 18 independent modules. Hence I must now find some other disposable or disposables that will enable me to give any compressibility I please in the case of an isotropic solid, and to give Green's 21 independent coefficients, for an anisotropic solid»²⁰⁷. A questo fine, occorre conferire al meccanismo qualcosa in modo da renderlo

²⁰⁵ Thomson W., *Baltimore Lectures on molecular dynamics and the wave theory of light*, London, 1904, *Appendix D*, p. 540.

²⁰⁶ Bravais A., «Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace», *Journal de l'École polytechnique*, **19**, Cahier 33, 1-128, 1850.

²⁰⁷ Idem, *Lecture XI*, p. 126.

incompressibile o dotato di un grado qualunque di compressibilità, così che «we can make it represent either cork or india-rubber, the extremes in respect to elasticity of known natural solids»²⁰⁸.

Su questo proposito Thomson deve aver riflettuto a lungo, se, come sembra, è del tutto sincera la sua dichiarazione: «I must confess that since 1856, when I promise this result, I have never seen any simple definite way of realising it until a few months ago when in making preparations for these lectures I found I could do it by running a cord twice round the edges of our parallelepiped of atoms»²⁰⁹. L'idea concepita dall'autore si traduce nello schema sotto indicato (fig.II.9.1), ove l'ordine delle terne indica la successione dei passaggi della corda attraverso gli anelli di spigolo²¹⁰

(000) (001) (011) (010) (000) (010) (011) (001) (000) (100) (110) (010)
 (110) (111) (011) (111) (101) (001) (101) (111) (110) (100) (101) (100)

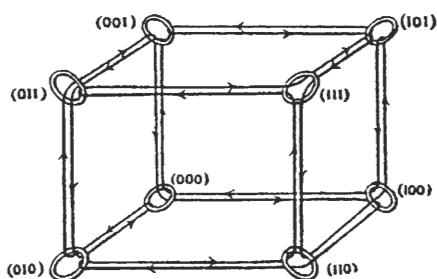


fig. II.9.1

Se la corda è inestensibile, un tale congegno assicura, per ogni spostamento infinitesimo, il rispetto della condizione d'inestensibilità $da + db + dc = 0$ se i lati a, b, c del parallelepipedo sono diversi, e la condizione d'incompressibilità $da/a + db/b + dc/c = 0$ se il parallelepipedo diviene un cubo, nonché la totale mancanza di rigidità a taglio.

208 Ibidem, p. 126.

209 Ibidem, p. 126.

210 Lo schema qui riportato è attribuito da Thomson a M. Brillouin, curatore, con P. Lugol, della traduzione francese del primo volume delle *Popular Lectures and Addresses* (1889) di Thomson, dal titolo *Conférences scientifiques et allocutions. Constitution de la matière*, Paris 1893; quello concepito da Thomson segue una successione leggermente diversa, nella quale il sesto e l'ottavo passaggio sono scambiati. Come Thomson ricorda in una annotazione del 14 aprile 1898 inserita nel testo dell'*XI Lettura*, p. 128, egli aveva concepito nel 1896 un altro meccanismo più semplice (vedi figura a lato) assicurante la costanza del volume, riconoscendo solo più tardi d'essere stato preceduto dallo stesso Brillouin nelle *Conférences*.

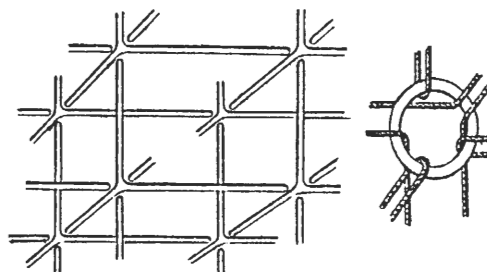


fig.II.9.2

In alternativa alla corda inestensibile, Thomson suggerisce di porre, in ogni spigolo degli otto cubi assemblati, «six bell-cranks properly pivoted to produce the effect of cords running, as it were, round pulleys (...) and instead of each straight portion of cord, substitute an inextensible bar of rigid matter, hooked at its two ends to the arm-ends of the proper bell-crank (...). Our model now may be constructed wholly of matter fulfilling the Poisson-Navier condition, and it gives us a molecular structure of matter violating that condition»²¹¹.

A questo fine, Thomson suppone di introdurre delle repulsioni lungo le diagonali interne alle quattro paia di vertici di ogni cubo: «[t]his will keep stretched all cords between rings, or connected rods between arm-ends of bell-crank; and will give a cubically isotropic elastic solid with a certain definite aelotropic quality»²¹². Introducendo inoltre delle forze mutue operanti secondo gli spigoli dei cubi fra un atomo e i suoi primi vicini, «we can give complete isotropy, or any prescribed aelotropy consistent with cubic isotropy». Tutto ciò conservando l'incompressibilità: «[b]ut lastly, by substituting india-rubber elastics for the cords, or ideal attractions or repulsions (Boscovichian) instead of the connecting bell-crank-arm-ends, we allow for any degree of compressibility, and produce if we please a completely isotropic elastic solid with any prescribed values for the modulus of rigidity and resistance to compression, fulfilling or not Poisson's ratio»²¹³.

Secondo Pearson²¹⁴, tale conclusione è vera soltanto per il fatto che, data l'iperstaticità del modello, l'azione tra una coppia di particelle viene a dipendere dalle azioni tra le altre coppie; nell'ipotesi di una "azione modificata" alla Jellet, si perviene infatti agli esiti della teoria multicostante. In questo senso, il modello di Thomson «does not carry us further than (...) the statement that modified action leads to multi-constancy»²¹⁵. Inoltre, si potrebbe supporre di aumentare i legami interni oltre il numero dei 18 previsto da Thomson e certamente «no one will assert that because we can build up a frame with supernumerary bars, bell-cranks and wires which has 24 or perhaps 30 disposable constants, that therefore we can have an elastic solid with 24 or 30 disposable coefficients (...). Out of material obeying rari-constant conditions, we can build up a frame with 18 (or possibly 80 disposable constants), but it has yet to be proved that the relations between stress and strain for such a frame will contain *the same number of independent coefficients*»²¹⁶.

211 Thomson W., op. cit., p. 130.

212 Ibidem, p. 130.

213 Ibidem, p. 130.

214 Todhunter I., Pearson K., op. cit., 2, II, pp. 458-459.

215 Ibidem, p. 459.

216 Ibidem, p. 458.

È forse possibile che le critiche di Pearson abbiano spinto Thomson a rivedere le sue modellazioni. Sta di fatto che, al termine della descrizione del modello meccanico aggiunta alla *Lecture XI* in data 14 aprile 1898, Thomson annota che «the method by cords and pulleys or bell-cranks which we have been considering (...) lost much of its interest for molecular physics when I found that the restriction to Poisson's ratio in an elastic solid held only for the case of a homogeneous assemblage of *single* Boscovich point-atoms: and that, in a homogeneous assemblage of pairs of dissimilar atoms, laws of force between the similar and between the dissimilar atoms can readily be assigned, so as to give any prescribed rigidity and any prescribed modulus of resistance to compression for an isotropic solid: and for an aeolotropic homogeneous solid, Green's 21 independent moduleses of elasticity, or 18 when axes of coordinates are so chosen as to reduce the number by three»²¹⁷.

Di queste nuove modellazioni, e dei loro rapporti con la struttura cristallina della materia, Thomson si era già occupato alla fine degli anni '80 nell'articolo "Molecular Constitution of Matter", nel quale, prendendo definitivamente partito a favore della dottrina di Boscovich, aveva espresso la convinzione che «a homogeneous isotropic solid is but an isotropically macled crystal, that is to say, a solid composed of crystalline portions having their crystalline axes or lines of simmetry distributed with random equality in all directions»²¹⁸. Questa idea, nella quale si riflette la definizione di *quasi-isotropia* data da Voigt negli stessi anni, non è sviluppata analiticamente da Thomson, piú interessato a trarre conseguenze dallo studio di assemblaggi «of mutually attracting points» nella forma di reticoli di Bravais semplici o doppi.

Per la verità, tali conseguenze sono soltanto enunciate, poiché un loro trattamento matematico è offerto solo nella successiva memoria "On the Elasticity of a Crystal according to Boscovich"²¹⁹. Qui egli dimostra rigorosamente che, «if we take the very simplest Boscovichian idea of a crystal, a homogeneous group of single points, we find essentially six relations between the twenty-one coefficients in the quadratic function expressing Φ [la densità d'energia di deformazione]»²²⁰, ciò che nel caso particolare d'isotropia si traduce nella relazione $3k = 5\mu$ fra il modulo di compressione k e la rigidezza tangenziale μ .

217 Thomson W., op. cit., p. 131.

218 Thomson W., "Molecular Constitution of Matter", *Mathematical and Physical Papers*, **3**, 395-427, Cambridge, 1890, p. 395. Pubblicato in *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **16**, 693-724, 1890.

219 Thomson W., "On the Elasticity of a Crystal according to Boscovich", *Proceedings of the Royal Society of London*, **54 B**, 59-75, 1893. Pubblicato come *Appendix I* nelle *Baltimore Lectures* (1904).

220 *Ibidem*, p. 61.

In effetti, assumendo per il potenziale Φ la forma additiva ritenuta irrinunciabile da Saint-Venant, $\Phi = \frac{1}{2} N \sum F(r)$ (ove N è il numero di particelle per unità di volume), si ha, per una deformazione infinitesima e sviluppando con Taylor fino al secondo ordine,

$$(II.10.1) \quad \begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} N \sum \left\{ F'(r) \Delta r + \frac{1}{2} F''(r) (\Delta r)^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} N \sum \left\{ \frac{F'(r)}{r} \varepsilon_{ij} \Delta x_i \Delta x_j + r F'(r) Q(\varepsilon_{ij}) + \frac{1}{2} \frac{F''(r)}{r^2} (\varepsilon_{ij} \Delta x_i \Delta x_j)^2 \right\}, \end{aligned}$$

ove $Q(\varepsilon_{ij})$ denota la parte quadratica nella deformazione compresa nell'espressione completa al second'ordine della dilatazione lineare

$$(II.10.2) \quad \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{r^2} [\varepsilon_{ij} \Delta x_i \Delta x_j] + Q(\varepsilon_{ij}).$$

Per un incremento infinitesimo $d\varepsilon_{ij}$ della deformazione, il lavoro corrispondente delle tensioni interne vale

$$d\Phi = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

per cui

$$(II.10.3) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2} N \sum \left\{ \frac{F'(r)}{r} \Delta x_i \Delta x_j + L(\varepsilon_{ij}) \right\}$$

ove L è funzione lineare in ε_{ij} . La condizione per la quale si ha $\sigma_{ij} = 0$ quando $\varepsilon_{ij} = 0$ produce allora le sei condizioni d'equilibrio nello stato naturale

$$(II.10.4) \quad \sum \frac{F'(r)}{r} \Delta x_i \Delta x_j = 0,$$

in base alle quali l'espressione della densità d'energia diventa

$$(II.10.5) \quad \begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} N \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_{11}^2 \sum \frac{C(r)}{r^4} \Delta x_1^4 + (\varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{23}^2) \sum \frac{C(r)}{r^4} \Delta x_2^2 \Delta x_3^2 \right. \\ &\quad \left. + (4\varepsilon_{31} \varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{11} \varepsilon_{23}) \sum \frac{C(r)}{r^4} \Delta x_1^2 \Delta x_2 \Delta x_3 + \varepsilon_{11} \varepsilon_{31} \sum \frac{C(r)}{r^4} \Delta x_1^3 \Delta x_3 + \dots \right\}, \end{aligned}$$

ove si è posto $C(r) = r^2 F''(r) - r F'(r)$. Si riconosce allora che, «with no limitation whatever to the number of neighbours acting with sensible force on any one point M , and with no simplifying assumption as to the law of force»²²¹, risultano eguali i coefficienti di $\varepsilon_{22} \varepsilon_{33}$ e

221 Ibidem, p. 67.

$2\varepsilon_{23}^2$, di $\varepsilon_{33} \varepsilon_{11}$ e $2\varepsilon_{31}^2$, di $\varepsilon_{11} \varepsilon_{22}$ e $2\varepsilon_{12}^2$, e quelli di $4\varepsilon_{31} \varepsilon_{12}$ e $2\varepsilon_{11} \varepsilon_{23}$, di $4\varepsilon_{12} \varepsilon_{23}$ e $2\varepsilon_{22} \varepsilon_{31}$, di $4\varepsilon_{23} \varepsilon_{31}$ e $2\varepsilon_{33} \varepsilon_{31}$, a conferma della validità delle relazioni di Cauchy.

È interessante seguire i ragionamenti di Thomson nell'applicazione di questi risultati generali al caso di un reticolo cubico a facce centrate. Per la simmetria nella distribuzione degli atomi esistente in tale circostanza, i coefficienti dei quadrati e dei prodotti nelle componenti di deformazione si riducono alle sole due forme

$$(II.10.6) \quad c_{1111} = \frac{1}{2} N \sum \frac{C(r)}{r^4} \Delta x_1^4 = \frac{1}{2} N \sum \frac{C(r)}{r^4} \Delta x_2^4 = \frac{1}{2} N \sum \frac{C(r)}{r^4} \Delta x_3^4$$

$$(II.10.7) \quad c_{1122} = c_{1212} = \mu = \frac{1}{2} N \sum \frac{C(r)}{r^4} \Delta x_2^2 \Delta x_3^2 = \frac{1}{2} N \sum \frac{C(r)}{r^4} \Delta x_3^2 \Delta x_1^2 = \frac{1}{2} N \sum \frac{C(r)}{r^4} \Delta x_1^2 \Delta x_2^2 ,$$

e l'energia assume l'espressione

$$(II.10.8) \quad \Phi = \frac{1}{2} c_{1111} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + c_{1122} (\varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{11} \varepsilon_{22}) \\ + 2c_{1212} (\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{12}^2) .$$

Richiamando le relazioni (per i reticoli cubici) già dedotte nel *Treatise on Natural Philosophy* fra il modulo di dilatazione cubica k , i coefficienti di elasticità longitudinale c_{1111} e laterale c_{1122} e la rigidezza trasversale μ_1 in piani a 45° rispetto a ciascuno dei tre piani $x_2 x_3$, $x_3 x_1$, $x_1 x_2$, ovvero

$$(II.10.9) \quad c_{1111} = k + \frac{4}{3} \mu_1 \quad c_{1122} = k - \frac{2}{3} \mu_1 ,$$

Thomson riscrive l'energia nella forma

$$\Phi = \frac{1}{2} (k + \frac{4}{3} \mu_1) (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + (k - \frac{2}{3} \mu_1) (\varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{11} \varepsilon_{22}) + 2\mu (\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{12}^2)$$

e riconosce che, per la relazione di Cauchy $c_{1122} = c_{1212}$, si ha

$$(II.10.10) \quad 3k = 2\mu_1 + 3\mu .$$

«This remarkable relation between the two rigidities and the compressibility of an equilateral homogeneous assemblage of Boscovich atoms was announced without proof in my paper on the "Molecular Constitution of Matter" (...). By [(II.10.6-7)] and [(II.10.9)] we see that if the law of force be such that

$$(II.10.11) \quad \sum \frac{C(r)}{r^4} \Delta x_1^4 = 3 \sum \frac{C(r)}{r^4} \Delta x_2^2 \Delta x_3^2$$

we have $\mu_1 = \mu$, and the body constituted by the assemblage is wholly isotropic in its elastic quality. In this case, [(II.10.10)] becomes $3k = 5\mu$ as found by Navier and Poisson»²²².

222 Ibidem, p. 68.

I risultati di Thomson non si limitano a questa brillante e originale deduzione delle conseguenze della teoria molecolare. Anticipando gli studi novecenteschi sui solidi cristallini, egli volge infatti l'attenzione ai casi in cui ogni particella del reticolo è soggetta all'azione dei soli primi e secondi vicini, giungendo a risultati perfettamente corretti nell'ambito dei modelli di reticoli a forze centrali.

Ad esempio, considerando solo i 12 primi vicini del reticolo cubico a facce centrate, distanti a dalla particella M , egli riconosce, svolgendo le somme comprese nelle (II.10.6-7),

$$c_{1111} = N C_1(a) \qquad c_{1122} = \frac{1}{2} N C_1(a),$$

ove $C_1(a) = a^2 F''(a) - a F'(a)$, da cui $\mu_1 = \frac{1}{2} \mu$, mentre tenendo conto solo dei 4 secondi vicini, distanti $a\sqrt{2}$ da M , trova

$$c_{1111} = N C_2(a\sqrt{2}) \qquad c_{1122} = 0,$$

ove $C_2(a\sqrt{2}) = 2a^2 F''(a\sqrt{2}) - a\sqrt{2} F'(a\sqrt{2})$, risultato prevedibile perché in questo caso il reticolo è privo di resistenza a taglio. Considerando poi assieme i primi e i secondi vicini, Thomson ottiene

$$c_{1111} = N (C_1(a) + C_2(a\sqrt{2})) \qquad c_{1122} = c_{1212} = \frac{1}{2} N C_1(a),$$

pervenendo alla relazione $C_1(a) = 2C_2(a\sqrt{2})$ per la quale è soddisfatta la condizione d'isotropia $c_{1212} = \frac{1}{2} (c_{1111} - c_{1122})$.

A questa esauriente disamina del reticolo semplice sfociante nell'isotropia univariante, Thomson fa seguire una succinta quanto oscura discussione sulla possibilità di rimuovere le relazioni di Cauchy attraverso un reticolo doppio, formato dall'assemblaggio di due reticoli semplici, in modo che ogni particella M del secondo reticolo sia all'interno del tetraedro individuato dai suoi quattro primi vicini A, B, C, D appartenenti al primo reticolo, secondo il modello presentato alla Royal Society il 7 giugno 1893²²³. L'idea di Thomson sembra ancora essere quella di assicurare all'assemblaggio incompressibile il rispetto della teoria molecolare, per poi rimuovere la condizione d'incompressibilità ed ottenere la generalità della teoria di Green: egli suppone inizialmente che le distanze MA, MB, MC, MD siano tali da rendere massimo il volume del tetraedro $ABCD$, ciò che fornisce due condizioni fra i sei lati di quest'ultimo; tradotte quelle distanze in aste rigide incernierate in M e nei quattro vertici A, B, C, D , egli osserva che tale dispositivo garantisce la costanza del volume

²²³ Cfr. *Nature*, **48**, 159-160, 1893. Fra i vari modelli esibiti da Thomson, è ricordato quello formato da «two homogeneous equilateral assemblages of points, red and green, with stretched springs between each point of the green assemblage and its nearest neighbours, and four struts between each of the reds and its nearest neighbour of the green assemblage; showing how any degree of resistance to compression with given rigidity can be provided for by Boscovich's theory» (p. 159).

dell'assemblaggio per un qualsiasi cambiamento di forma infinitesimo. «Let now» afferma Thomson «any forces whatever (...) act between the points of our primary assemblage: and, if we please, also between all the points of our second assemblage and all the points of the two assemblages. Let these forces fulfil the condition of equilibrium [valide nello stato naturale]. Thus we have an incompressible elastic solid and, as above, we see that there are fifteen independent coefficients in the quadratic function of the strain-components expressing the work»²²⁴. A questo punto, conclude Thomson, «by assigning proper values to the four stiffnesses [delle aste rese deformabili] and by supposing the tetrahedron to be freed from the two conditions making it our special tetrahedron, we have six quantities arbitrarily assignable, by which, adding these six to the former fifteen, we make give arbitrary values to each of the twenty-one coefficients»²²⁵.

Difficile attribuire a questa suggestiva idea il valore di soluzione definitiva. Essa non aggiunge sostanzialmente nulla a quanto già enunciato nel lavoro del 1890 in merito ad un analogo assemblaggio di punti. In quel caso, come in questo, riconosciamo che il modello è quello di una travatura reticolare iperstatica, nella quale, quindi, gli sforzi in un legame dipendono da quelli negli altri, secondo l'idea di “azione modificata” alla Jellet; in sostanza, la rimozione delle relazioni di Cauchy non sarebbe conseguibile «in strictest Boscovichian doctrine», come riteneva Thomson, ma solo superando la forma additiva del potenziale, da lui stesso riconosciuta quale origine degli esiti rari-costanti. D'altra parte, il riferimento a reticoli doppi o multipli di punti rivela la grande intuizione dello scienziato scozzese: è ad essi, infatti, che si rivolgeranno i fisici moderni nel medesimo fine di eludere l'*impasse* delle relazioni di Cauchy senza abbandonare l'ipotesi di un potenziale a due corpi. Su questa svolta torneremo nel prossimo capitolo, analizzando il cospicuo contributo di Born nella messa a punto dell'odierna *Lattice Dynamics*.

II. 11. Il ruolo di Pearson nella *History*.

Proponendo il titolo a questo paragrafo, abbiamo volutamente inteso alludere alla posizione di protagonista, seppur minore ed attardato, avuta da Karl Pearson nel contesto della controversia sulle costanti, e non semplicemente evidenziare il ruolo di sistematizzatore di una *querelle* ormai scemante al quale si è soliti far riferimento per giudicare il suo contributo alla *History* di Todhunter. Peraltro, sarebbe assai difficile rintracciare nelle pagine

224 Thomson W., “On the Elasticity ...”, p. 75.

225 Ibidem, p. 75.

dedicate al confronto fra «rari-constant» e «multi-constant theory»²²⁶, una traccia sicura dell'avvenuta dissoluzione delle nubi che, fin dalle origini, avevano gravato sulla duplice formulazione dell'elasticità.

Non è su quelle pagine, comunque, che intendiamo soffermarci: è noto, d'altra parte, il sostanziale dissenso in esse manifestato verso le tesi dei compatrioti multi-costanti, tanto che il “metodo di Green” sarebbe solo «a chain of arbitrary assumptions» se privato del riferimento fisico alle azioni molecolari, mentre la suggestiva idea di Stokes e Maxwell potrebbe inscrivere solo in una teoria non-lineare; e se l'ipotesi di un'interazione molecolare «of a polar character» non è scartata *a priori*, sarebbe difficile concepirla nei corpi isotropi, per i quali, d'altro canto, non può certo dirsi che gli esperimenti «have absolutely settled the controversy in favour of multi-constancy». Riecheggiano qui, in maniera più o meno velata ma continuamente ricorrente, le convinzioni del «great French elastician», come Saint-Venant viene ricordato da Pearson nel suo incondizionato apprezzamento, talché nulla di realmente nuovo potrebbe trarsi dalla sua disamina critica²²⁷.

Il nostro interesse va invece ad alcune indicazioni che l'autore inglese ha suggerito col fine di generalizzare le ipotesi della teoria molecolare e di proporre il possibile superamento delle sue limitazioni; non tanto perché in quelle indicazioni possa reperirsi la premessa di sviluppi risolutivi, quanto perché esse costituiscono forse l'ultimo tentativo d'accordare gli esiti contrastanti delle due impostazioni senza abbandonare il modello molecolare originario.

La prima osservazione suggerita da Pearson riguarda la possibilità di pervenire alle formule rari-costanti «supposing the action to be central but not necessarily a function of the intermolecular distance only»²²⁸. Questo pensiero, apparentemente di grande rilievo, rimanda alle deduzioni sviluppate da Weyrauch nella sua *Theorie elastischer Körper* pubblicata nel 1884, poco prima dell'uscita del volume I della *History*. È assai probabile che tale circostanza abbia indotto Pearson a fraintendere la reale consistenza dell'ipotesi di Weyrauch, il quale, generalizzando l'espressione dell'azione tra due molecole M, m nella forma $R = Mm [f(r) - t]$, aveva inteso nella parte Mmt «ganz allgemeinen eine Function derjenigen Grössen (...), welche neben der Entfernung r auf R Einfluss nehmen»²²⁹, per poi riconoscere, nella

226 Todhunter I., Pearson K., op. cit., 1, pp. 496-505, dall'art. [922] all'art. [932].

227 È qui il caso di ricordare che una ricostruzione storica degli studi ottocenteschi sull'elasticità dei solidi era interesse comune anche di W. J. Ibbetson, come apprendiamo dalla prefazione del suo *Elementary treatise on the mathematical theory of perfectly elastic solids with a short account of viscous fluids*, London, 1887. Purtroppo, la precedente pubblicazione della *History* di Todhunter ha fatto desistere l'autore dal portare a compimento le sue intenzioni.

228 Ibidem, p. 497.

229 Weyrauch J. J., *Theorie elastischer Körper. Eine Einleitung zur mathematischen Physik und technischen Mechanik*, Leipzig, 1884, p. 132.

variazione Δt di quella funzione, l'incremento di temperatura costante entro la sfera d'attività molecolare: nulla di sostanzialmente nuovo, dunque, rispetto ai precedenti studi sulla termoelasticità di Duhamel. Lo stesso Pearson, peraltro, avvertì il bisogno di rivedere la sua foga iniziale nei *Corrigenda and Addenda to Volume I*, precisando che, «by taking R in the form $R = Mm [f(r) - t]$ and not $R = Mm f(r, t)$, Weyrauch much limits the generality of his results (...)», per poi aggiungere a proprio sostegno che «even this may serve to indicate that wider laws of intermolecular action (...) may be found to lead to rari-constancy equations»²³⁰.

Piú interessante ai nostri fini è invece il tentativo, appena accennato nelle pagine finali della *History*, di giustificare le formule d'isotropia bi-costanti senza apparentemente abbandonare le usuali ipotesi sulla legge delle azioni molecolari. Spunto all'idea di Pearson è la concezione dell'isotropia che abbiamo visto espressa da Thomson: un corpo isotropo non sarebbe altro che un aggregato di minutissimi frammenti cristallini casualmente orientati in ogni suo punto. Tale concezione, osserva Pearson, «seem[s] to suggest Saint-Venant's *amorphous bodies*» per i quali valgono le due serie di relazioni fra i coefficienti elastici

$$(II.11.1) \quad \begin{aligned} 2c_{2323} + c_{2233} &= \sqrt{c_{2222} c_{3333}} \\ 2c_{3131} + c_{3311} &= \sqrt{c_{3333} c_{1111}} \\ 2c_{1212} + c_{1122} &= \sqrt{c_{1111} c_{2222}} \end{aligned}$$

$$(II.11.2) \quad \begin{aligned} 2c_{2323} + c_{2233} &= \frac{c_{2222} + c_{3333}}{2} \\ 2c_{3131} + c_{3311} &= \frac{c_{3333} + c_{1111}}{2} \\ 2c_{1212} + c_{1122} &= \frac{c_{1111} + c_{2222}}{2} \end{aligned}$$

Ora, afferma Pearson, «in both cases *isotropic* “amorphous bodies” have a single interconstant relation» della forma $2c_{2323} + c_{2233} = c_{1111}$, che riduce le formule ad essi relative alle relazioni bi-costanti

²³⁰ Todhunter I., Pearson K., op. cit., 2, II, *Corrigenda and Addenda to Volume I*, p. 2. In effetti, come mostrato dallo stesso Pearson, assumendo la forma $R = Mm [f(r) - t]$ per l'azione molecolare e considerando nella funzione t l'effetto della temperatura, è possibile portare fuori dalle sommatorie esprimenti le tensioni la variazione Δt , supposta costante nella sfera d'attività molecolare, e disaccoppiare quindi le azioni termiche da quelle meccaniche, ciò che «would be impossible if Δt were due to “modified action”, because the modifying elements (or molecules) would be themselves in the immediate neighbourhood of M » (p. 2).

$$(II.11.3) \quad \sigma_{11} = (2c_{2323} + c_{2233}) \epsilon_{11} + c_{2323} (\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \quad \sigma_{23} = c_{2323} \gamma_{23} .$$

In effetti, poiché l'isotropia impone le uguaglianze

$$c_{1111} = c_{2222} = c_{3333} \quad c_{2233} = c_{3311} = c_{1122} \quad c_{2323} = c_{3131} = c_{1212} ,$$

le tre relazioni d'amorfismo (II.11.2-3) si riducono all'unica relazione (d'isotropia)

$$2c_{2323} + c_{2233} = c_{1111}$$

per cui, secondo la denominazione di Pearson, i corpi *amorfi e isotropi* rispondono alle (II.11.3). Tali formule, però, derivano la presenza di due coefficienti elastici unicamente dal fatto di aver trascurato la relazione di Cauchy $c_{2323} = c_{2233}$, implicita (assieme alle altre due $c_{3131} = c_{3311}$ e $c_{1212} = c_{1122}$), nelle espressioni (a tre coefficienti) date da Saint-Venant per i corpi amorfi ma apparentemente intesa da Pearson quale **ulteriore e indipendente** conseguenza della «assumption of rari-constancy». Tuttavia, continua l'autore rivelando il proprio pensiero, «there is *no* distinction in the elastic constants between an absolutely homogeneous isotropic solid and an isotropic amorphous body (i. e. an isotropically macled crystal). The reason for this apparent paradox seems to lie in the fact that the elements, the action between which we consider in our elastic theories, are supposed to contain an enormously great number of the individual crystals, and so are dealt with as if they were essentially homogeneous»²³¹. Questa sarebbe dunque l'origine della *rari-constancy*. Ma, «[i]f the element does not contain this great number, then, I think, the above stress-strain relations must not be considered as holding for the stress across any individual element but only for the mean of the stresses across a great number of individual elements subjected to the like strain. I think this idea might be used to throw some more light on the question of bi-constant isotropy. Such bi-constant isotropy may be physically due to amorphism, such amorphism not being so fine-grained as to admit practically of the application of that principle of absolutely homogeneous distribution to which the rari-constant elasticians appeal in calculating the stresses from their molecular hypothesis»²³².

In questo passo è evidente il forzato intento di conservare un campo di validità alla teoria uni-costante, dopo averla artificialmente negata pur senza abbandonare l'ipotesi fondamentale sulla natura delle forze molecolari; peraltro, quello stesso «principle of

231 Ibidem, 1, p. 478.

232 Ibidem, p. 478.

absolutely homogeneous distribution» dal quale essa dipenderebbe è del tutto ininfluenza sul riconoscimento delle relazioni di Cauchy, come evidenziato dalla precedente trattazione di Thomson, rimasta esclusa dal vaglio della *History* per il pressoché contemporaneo periodo di pubblicazione. Difficile, dunque, attribuire un reale valore alla tesi di Pearson, non supportata peraltro da alcuna giustificazione analitica. Tuttavia, il riferimento alla valutazione in media delle tensioni nei corpi quasi-isotropi, quali sono gli «isotropically macled crystals» di Thomson, è effettivamente calzante e costituisce la procedura utilizzata da Voigt²³³ in poi per determinare le costanti elastiche negli aggregati policristallini.

II. 12. Gli ultimi sostenitori della teoria molecolare.

L'atteggiamento ancora irrisolto verso gli esiti multi-costanti che abbiamo riconosciuto in Pearson non riflette semplicemente una personale presa di posizione. Per quanto isolata nel contesto della comunità scientifica inglese, la sua voce fa eco a quella di numerosi autori del Continente. In effetti, dopo gli iniziali turbamenti indotti dalla nuova via di Green, l'adesione alle conseguenze dell'ipotesi molecolare non si limitava al nome eccellente di Saint-Venant, ma coinvolgeva una consistente schiera di studiosi, non sempre, peraltro, su posizioni altrettanto coerenti e rigorose quanto quelle dell'elasticista francese.

Beer²³⁴, ad esempio, sosteneva le formule d'isotropia uni-costante attribuendone la ragione al fatto che le particelle sarebbero disposte in modo tale da poter considerare lo spazio da esse occupato come un continuo materiale omogeneo. Il già citato Weyrauch²³⁵, d'altro canto, non esitava ad affiancare alla trattazione in termini molecolari della termo-elasticità un parallelo capitolo dagli esiti opposti, incentrato sull'ipotesi del continuo.

²³³ Voigt W., "Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle", *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, **34**, 3-100, 1887. Questo importante lavoro, benché precedente la pubblicazione del volume II della *History*, è appena ricordato da Pearson, senza alcuna annotazione critica, al termine della sezione dedicata a Saint-Venant (2, I, p. 286).

²³⁴ Beer A., *Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität*, Leipzig, 1869.

²³⁵ Weyrauch J. J., op. cit.; cfr. Abschnitt VI "Ausdrücke für die Spannungen auf Grund der Erfahrung", precedente la Abschnitt VII "Ausdrücke für die Spannungen nach der Molekulartheorie".

Su una linea di piú conseguente adesione alla tesi atomistica si collocano semmai i lavori di Kirsch²³⁶, Grashof²³⁷ e De Commines de Marsilly²³⁸. Ma dove la formulazione rari-costante dell'elasticità dei solidi ha trovato un terreno fertile alla sua diffusione è certamente in Italia e, in particolare, in quell'ambiente piemontese, gravante attorno alla Regia Scuola d'Applicazione per Ingegneri di Torino, da tempo dissodato al seme della cultura scientifica francese. Se, da un lato, Menabrea²³⁹ concepiva il suo *principio di elasticità* avendo a riferimento ideale un sistema reticolare di aste e nodi, dall'altro, Castigliano ne rifondava il contenuto tenendo a sfondo dei suoi *teoremi sul lavoro di deformazione* la medesima immagine dell'universo materiale. Non stupisce, pertanto, che le conseguenze di questa concezione si riflettano, nella sua *Théorie*²⁴⁰ del 1879-'80, in una pacifica accettazione della formulazione uni-costante dell'isotropia, quasi che la rilettura dell'elasticità in termini energetici dovesse implicare gli esiti ristretti della teoria molecolare.

In questa stessa linea, seppur con diverso e piú consapevole atteggiamento critico, si situa anche Crotti, collega ed amico di Castigliano. Nel suo pregevole “manualletto” di *Teoria dell'elasticità*²⁴¹ egli non esita infatti a far propria la definizione molecolarista di tensione, senza rinunciare, però, ad un «esame dei postulati richiesti dal metodo di Navier» nel quale si rivela una piú cauta posizione metodologica, assai vicina a quella tenuta da Green cinquant'anni prima²⁴². Di fronte al 2° *postulato*, per il quale l'azione fra due particelle

236 Kirsch G.E., “Fundamentalgleichungen der Theorie der Elasticität fester Körper, hergeleitet aus der Betrachtung eines Systems von Punkten, welche durch elastische Streben verbunden sind”, *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, **12**, 481-481; 553-570; 631-638, 1868.

237 Grashof F., *Theorie der Elasticität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Technik*, Berlin, 1878.

238 De Commines de Marsilly L. J. A., *Les lois de la matière. Essais de mécanique moléculaire*, Paris, 1884.

239 Menabrea L.F. “Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques”, *Comptes rendus*, **46**, 1056-1060, 1858.

240 Castigliano A., *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, Torino, 1879-'80.

241 Crotti F., *La teoria dell'elasticità ne' suoi principî fondamentali e nelle sue applicazioni pratiche alle costruzioni*, Milano, 1888.

242 È interessante riportare qui un passo particolarmente significativo del testo di Crotti: «Il Green, da vero figlio della razza piú positiva del mondo, non seppe acconciarsi alle sottili ipotesi molecolari della scuola francese. La mente di Green intuiva profondamente il grande principio della conservazione della energia meccanica in mezzo alle trasformazioni che questa può subire; l'idea di *lavoro meccanico* era di già pervenuta alla sua maturità fra i tecnici della nazione che aveva inaugurato il movimento industriale moderno. Il Green rigettò ogni teoria che avesse a fondamento qualsiasi ipotesi sulle azioni molecolari: secondo Green i misteri del microcosmo dovevano essere impenetrabili alle azzardate ipotesi nostre. E non era la migliore delle ipotesi questa di fondare la teoria dell'elasticità su quel principio stesso che l'esperienza poneva sempre in maggior luce e che forse era l'enunciato della legge piú generale, e piú necessaria di tutto l'universo? Così fece Green. Dal principio del lavoro egli volle e seppe dedurre sino alle ultime sue conseguenze la dottrina dell'elasticità. Quel principio del lavoro che nella scuola di Navier entra come di straforo, portatovi così come per combinazione

sarebbe determinata unicamente dalla variazione della loro distanza, Crotti afferma «essere legittimo il sospetto che anche uno spostamento di altre molecole attigue possa determinare un'azione fra le due molecole date, sebbene la distanza fra queste due non abbia variato». In fondo, continua l'autore recuperando il pensiero di Clausius, «questa idea di molecole è un'astrazione della nostra mente [e] qualunque cosa si affermi su questo argomento delle azioni molecolari non può che essere desunto, per via d'induzione, da quanto avviene sperimentando su corpi di dimensioni finite. È quindi logico che il solo esperimento può dire se l'ipotesi di Navier è ammissibile o no»²⁴³.

È singolare che una tale consapevolezza critica non sia altrettanto riconoscibile nelle successive *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni* redatte da Guidi²⁴⁴ nei suoi anni d'insegnamento presso il Politecnico di Torino, una volta rilevato il posto di Curioni alla rifondata Scuola d'Applicazioni. In quest'opera, così rilevante per il taglio moderno dato all'esposizione della disciplina, la “Teoria generale dell'elasticità” è ancora presentata entro lo schema rari-costante dell'apprezzato trattato di Grashof, segno di una perdurante quanto acritica fiducia nell'impostazione tradizionale.

Sotto questo profilo, il testo di Guidi appare irrimediabilmente attardato, tanto più se lo si confronta con la pressoché contemporanea opera di Marcolongo²⁴⁵, perfettamente aggiornata agli ultimi sviluppi impressi all'impostazione molecolare dai lavori di Poincaré e Voigt. È a questi due autori, infatti, che dobbiamo ormai rivolgere la nostra attenzione per riconoscere i nuovi traguardi posti all'orizzonte della ricerca del XX secolo.

dalla ipotesi (che sembrava così legittima) delle azioni centrali, entra invece come potere sommo e riconosciuto nella teoria di Green. È noto che se due punti si attraggono con forza che non dipende che dalla distanza dei loro centri, anche il lavoro dell'attrazione loro (dato un qualunque movimento dei due punti) dipende dalla sola distanza. La scuola di Navier nel ritorno d'un corpo elastico allo stato primitivo vedeva soprattutto un ritorno allo stato primitivo di tutte le distanze molecolari, ciò che per combinazione includeva questa cosuccia, che il lavoro assorbito dal corpo equivaleva a quello restituito dal corpo (durante una fase completa di andata e ritorno ben inteso). Green invece dice: io non so nulla di azioni centrali tra le molecole: so invece che il lavoro si conserva; non se ne perde nel nulla, non se ne crea dal nulla; il moto perpetuo è impossibile» (pp. 10-11).

²⁴³ Ibidem, p. 108.

²⁴⁴ Guidi C., *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni, II, Teoria dell'elasticità e resistenza dei materiali*, Torino, 1909^v, pp. 323-331.

²⁴⁵ Marcolongo R., *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, Milano, 1904. In particolare, capp. V e XI.

CAP. III. - I NUOVI TRAGUARDI DEL XX SECOLO

III. 1. La risoluzione formale di Poincaré.

Questo nuovo capitolo è quello delle conquiste definitive, delle soluzioni finalmente raggiunte per inquadrare l'ormai datata *Mécanique moléculaire* entro i rinnovati orizzonti della nascente *Fisica dello stato solido* attraverso gli sviluppi che ci accingiamo a ripercorrere. Ma è anche il capitolo della rinuncia, o meglio, dell'“indifferenza” ad attribuire alle ipotesi fisiche il ruolo di rappresentazioni del reale, come era stato per la tesi atomistica presso i maggiori fautori della *Mécanique physique*.

Questa indifferenza verso le assunzioni fisiche è ciò che consente di riconoscere nella risoluzione formale offerta da Poincaré il profilo metodologico della scienza moderna²⁴⁶. «La théorie des ondulations» scrive lo scienziato ed epistemologo francese nella prefazione alle sue *Leçons sur la théorie mathématique de la lumière* tenute alla Sorbona nel 1887-'88, «repose sur une hypothèse moléculaire; pour les uns, qui croient découvrir ainsi la cause sous la loi, c'est un avantage; pour les autres, c'est une raison de méfiance; mais cette méfiance me paraît aussi peu justifiée que l'illusion des premiers (...). En effet», continua l'autore, «je n'emprunte aux hypothèses moléculaires que deux choses: le principe de conservation de l'énergie et la forme linéaire des équations qui est la loi générale des petits mouvements»²⁴⁷.

Seguiamo dunque l'esemplare trattazione di Poincaré nella quale prende forma matematica, in un contesto ormai scevro di condizionanti implicazioni metafisiche, quella “sospensione di giudizio” sulle azioni molecolari elevata da Green ad ipotesi di lavoro.

Il rigore della formulazione s'impone fin dall'inizio: ammessa l'esistenza di una funzione delle forze U sviluppabile nelle potenze crescenti degli spostamenti u_i ($i = 1, 2, 3$) delle molecole dalla loro posizione d'equilibrio stabile, cioè

$$(III.1.1) \quad U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots,$$

Poincaré la suddivide in una funzione delle forze interne Φ e in una funzione delle forze esterne Γ ponendo

$$(III.1.2) \quad U = \Phi + \Gamma.$$

Egli osserva che, a parte la costante U_0 , supposta convenientemente nulla, il termine del primo ordine $U_1 = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial u_i}\right)_0 u_i$ è nullo poiché $\left(\frac{\partial U}{\partial u_i}\right)_0$ rappresenta la proiezione secondo la direzione x_i della forza sulla generica molecola M , forza che è nulla nella posizione

²⁴⁶ Cfr., ad esempio, Poincaré H., *Science and Hypothesis*, New York, 1952.

²⁴⁷ Poincaré H., *Leçons sur la théorie mathématique de la lumière*, Paris, 1889, p. III.

d'equilibrio nella quale è $u_i = 0$ per cui, nell'ipotesi di spostamenti infinitesimi, lo sviluppo della funzione U può arrestarsi al secondo ordine, ossia $U = U_2 = \Phi_2 + \Gamma_2$ ²⁴⁸.

Assunto, come sottinteso da Green,

$$(III.1.3) \quad \Phi = F(R, R', R'', \dots)$$

ove R, R' etc. sono i quadrati delle distanze tra le coppie di molecole, e indicato con

x_i le coordinate iniziali della molecola μ , (con $i = 1, 2, 3$)

$x_i + u_i$ le sue nuove coordinate dopo gli spostamenti u_i ;

$x_i + \Delta x_i$ le coordinate iniziali della molecola ν ,

$x_i + \Delta x_i + u_i + \Delta u_i$ le sue nuove coordinate dopo gli spostamenti $u_i + \Delta u_i$,

$R + \Delta R = (\Delta x_i + \Delta u_i)^2$ il quadrato della loro distanza nello stato deformato,

ove

$$\Delta R = 2 \Delta x_i \Delta u_i + (\Delta u_i)^2 = \Delta R_1 + \Delta R_2 ,$$

lo sviluppo della funzione $\Phi = F(R+\Delta R, R'+\Delta R', \dots)$ nelle variazioni ΔR fino ai termini del secondo ordine fornisce

$$(III.1.4) \quad \Phi = F(R, R', \dots) + \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)_0 \Delta R_1 + \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)_0 \Delta R_2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2}\right)_0 \Delta R_1^2 + \sum_{\mu\nu, \eta\xi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R \partial R'}\right)_0 \Delta R_1 \Delta R_1'.$$

Identificando tale sviluppo con quello della stessa funzione $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2$ in termini di spostamento, si ha

$$(III.1.5) \quad \Phi_1 = \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)_0 \Delta R_1$$

$$(III.1.6) \quad \Phi_2 = \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)_0 \Delta R_2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2}\right)_0 \Delta R_1^2 + \sum_{\mu\nu, \eta\xi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R \partial R'}\right)_0 \Delta R_1 \Delta R_1'.$$

Scopo di Poincaré è quello di riscrivere queste ultime due quantità con riferimento ad ogni elemento di volume in cui può pensarsi suddiviso il corpo, in modo che all'interno di ciascuno di essi la deformazione possa considerarsi costante e sia così lecita la transizione ad una teoria del continuo. A tal fine, ogni elemento di volume deve pensarsi infinitamente piccolo rispetto alle dimensioni del corpo, ma estremamente grande rispetto al raggio d'attività molecolare affinché abbiano senso le sommatorie precedenti. Ciò implica che, per due volumi qualunque (anche infinitesimi) V, V' del corpo, separati da una superficie S , le quantità Φ_1 e

²⁴⁸ Poincaré precisa che si può porre $U_0 = \Phi_0 + \Gamma_0 = 0$ mentre si ha $U_1 = \Phi_1 + \Gamma_1 = 0$; ora, Φ_0 e Γ_0 possono pensarsi nulli separatamente ma la stessa cosa non può dirsi per Φ_1 e Γ_1 ; come mostrato in seguito, solo se nello stato iniziale d'equilibrio le forze esterne derivanti da Γ_1 sono nulle (nel qual caso lo stato iniziale è quello naturale), allora si ha $\Phi_1 = 0$, ciò che implica l'annullarsi delle tensioni interne iniziali. Se invece le forze esterne nello stato iniziale non sono nulle, deve annullarsi la somma $\Phi_1 + \Gamma_1$.

Φ_2 derivano praticamente dalle forze scambiate tra coppie di molecole $(\mu\nu)$ e $(\eta\xi)$ poste all'interno dei volumi V, V' , perché è trascurabile il contributo "di superficie" dovuto alle pochissime interazioni fra molecole poste l'una in V e l'altra in V' ; si ha cioè $\Phi_V + \Phi_{V'} \approx \Phi_{V+V'}$, perché $\Phi_{V+V'}$ è dell'ordine di grandezza del raggio d'attività molecolare. In breve, si può introdurre la densità d'energia $\varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_V}{V}$, ove il limite è preso macroscopicamente, in modo che il più piccolo volume V contenga ancora un gran numero di molecole.

Poincaré introduce l'usuale espressione approssimata al primo ordine per le variazioni degli spostamenti

$$\Delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j,$$

e discute dettagliatamente ciò che divengono le quantità

$$(III.1.7) \quad \varphi_1 = \frac{1}{V} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta R_1$$

$$(III.1.8) \quad \varphi_2 = \frac{1}{V} \left[\sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta R_2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \right)_0 \Delta R_1^2 + \sum_{\mu\nu, \eta\xi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R \partial R'} \right)_0 \Delta R_1 \Delta R_1' \right].$$

Poiché si ha

$$\Delta R_1 = 2 \Delta x_i \Delta u_i = 2[\varepsilon_{11} \Delta x_1^2 + \varepsilon_{22} \Delta x_2^2 + \varepsilon_{33} \Delta x_3^2 + 2\varepsilon_{23} \Delta x_2 \Delta x_3 + 2\varepsilon_{31} \Delta x_3 \Delta x_1 + 2\varepsilon_{12} \Delta x_1 \Delta x_2]$$

ove, al solito, è $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$,

risulta

$$(III.1.9) \quad \varphi_1 = \frac{1}{V} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta R_1 = \frac{2}{V} [\varepsilon_{11} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_1^2 + \varepsilon_{22} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_2^2 + \varepsilon_{33} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_3^2 + 2\varepsilon_{23} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_2 \Delta x_3 + 2\varepsilon_{31} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_3 \Delta x_1 + 2\varepsilon_{12} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_1 \Delta x_2]$$

Alcune considerazioni importanti si offrono subito. Anzitutto, dato che lo sviluppo della funzione delle forze esterne

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2$$

ha il termine del primo ordine Γ_1 uguale a zero se le forze sono nulle nello stato iniziale, dalla condizione $U_1 = \Phi_1 + \Gamma_1 = 0$ discende identicamente $\Phi_1 = 0$ e quindi $\varphi_1 = 0^{249}$; si traggono allora le sei condizioni

249 Per forze esterne iniziali nulle si ha quindi, nell'approssimazione al second'ordine $U = U_2 = \Gamma_2 + \Phi_2$. Poincaré osserva che «le premier terme [Γ_2] ne jouera en général aucun rôle dans l'élasticité; il ne dépend, en effet, que des pressions extérieures et ne peut provenir que des déplacements des molécules superficielles. Or, quand on étudie le mouvement dans un milieu indéfini, on est conduit à admettre que les quantités [u_i] sont nulles à l'infini; en outre, dans un milieu limité, les conséquences déduites des calculs dans lesquels la quantité [Γ_2] est supposée nulle, rigoureusement vraies pour les portions du milieu situées à une certaine distance des surfaces extérieures, sont à peine modifiées pour les portions voisines de ces surfaces» (*Leçons*, pp. 11-12).

$$(III.1.10) \quad \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_i \Delta x_j = 0$$

che definiscono, analogamente alle (II.10.4) di Thomson, l'annullarsi delle tensioni iniziali nello stato naturale.

Per quanto riguarda la parte del secondo ordine φ_2 , si riconosce che, essendo

$$(III.1.11) \quad \Delta R_2 = \Pi_{11} \Delta x_1^2 + \Pi_{22} \Delta x_2^2 + \Pi_{33} \Delta x_3^2 + 2\Pi_{23} \Delta x_2 \Delta x_3 + 2\Pi_{31} \Delta x_3 \Delta x_1 + 2\Pi_{12} \Delta x_1 \Delta x_2$$

ove $\Pi_{hk} = u_{i,h} u_{i,k}$,

il suo primo termine diviene

$$(III.1.12) \quad \frac{1}{V} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta R_2 = \frac{1}{V} \left[\Pi_{11} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_1^2 + \Pi_{22} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_2^2 + \Pi_{33} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_3^2 \right. \\ \left. + 2\Pi_{23} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_2 \Delta x_3 + 2\Pi_{31} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_3 \Delta x_1 + 2\Pi_{12} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_1 \Delta x_2 \right];$$

poiché i sei polinomi Π_{hk} hanno per coefficienti le sei quantità $\sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_h \Delta x_k$, esso è nullo al pari di φ_1 quando lo stato iniziale è quello naturale.

Infine, per quanto riguarda i due restanti termini di φ_2 , essi formano evidentemente un'espressione omogenea e di secondo grado nelle componenti di deformazione contenente, in generale, 21 distinti coefficienti della forma

$$(III.1.13) \quad \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \alpha \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \right)_0 \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h \Delta x_k + \sum_{\mu\nu, \eta\xi} \alpha \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R \partial R'} \right)_0 \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h' \Delta x_k'$$

ove α è un numero che vale 4 per i coefficienti di ε_{ii}^2 , 8 per i coefficienti $\varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj}$, 16 per i coefficienti di $\varepsilon_{ii} \varepsilon_{hk}$ e di ε_{ij}^2 , 32 per i coefficienti di $\varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk}$.

Poincaré osserva che, «lorsque les forces sont centrales», o, per meglio dire, quando le interazioni non dipendono che dalla sola distanza fra due molecole, si ha

$$(III.1.14) \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R \partial R'} \right)_0 = 0,$$

per cui l'espressione di φ_2 diviene

$$(III.1.15) \quad \varphi_2 = \frac{1}{V} \left[\sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta R_2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \right)_0 \Delta R_i^2 \right]$$

e i coefficienti (III.1.13) si riducono alla forma

$$(III.1.16) \quad \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \alpha \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \right)_0 \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h \Delta x_k$$

simmetrica nei quattro indici i, j, h, k e quindi avente al più 15 valori distinti: in questo caso infatti, conformemente alla trattazione di Thomson, risultano eguali i coefficienti di $\varepsilon_{22} \varepsilon_{33}$ e

$2\varepsilon_{23}^2$, di $\varepsilon_{33} \varepsilon_{11}$ e $2\varepsilon_{31}^2$, di $\varepsilon_{11} \varepsilon_{22}$ e $2\varepsilon_{12}^2$, e quelli di $2\varepsilon_{31} \varepsilon_{12}$ e $\varepsilon_{11} \varepsilon_{23}$, di $2\varepsilon_{12} \varepsilon_{23}$ e $\varepsilon_{22} \varepsilon_{31}$, di $2\varepsilon_{23} \varepsilon_{31}$ e $\varepsilon_{33} \varepsilon_{31}$, come richiesto dalle relazioni di Cauchy.

Interessante ed originale è la deduzione²⁵⁰ del potenziale delle forze interne nel caso di isotropia. Anziché far diretto riferimento alle conseguenti simmetrie meccaniche, Poincaré traduce l'indipendenza dalla scelta degli assi nel linguaggio dell'algebra, mostrando che l'invarianza della funzione Φ è assicurata quando questa è espressa da polinomi isotropi di primo e secondo grado; ora, il solo polinomio isotropo di primo grado è la dilatazione cubica $\Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, per cui deve essere

$$\varphi_1 = \gamma \Theta ;$$

per la parte del secondo ordine, egli assume invece la combinazione lineare

$$\varphi_2 = \delta (\Pi_{11} + \Pi_{22} + \Pi_{33}) - \frac{\lambda}{2} \Theta^2 - \mu H$$

dei tre polinomi linearmente indipendenti

$$\Theta^2 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2$$

$$H = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2\varepsilon_{23}^2 + 2\varepsilon_{31}^2 + 2\varepsilon_{12}^2$$

$$(\Pi_{11} + \Pi_{22} + \Pi_{33}) = \sum_{ij} u_{ij}^2 .$$

Ora, poiché nell'espressione generale di φ_1 il coefficiente di ε_{11} è $2\sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)_0 \Delta x_1^2$ mentre in quella di φ_2 il coefficiente di Π_{11} è $\sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)_0 \Delta x_1^2$, ne risulta $\gamma = 2\delta$; in particolare, se le forze esterne sono nulle si ha $\gamma = 2\delta = 0$. Infine, nel caso di forze interne derivanti da un potenziale a due corpi, si è visto che sono eguali i coefficienti di $\varepsilon_{22} \varepsilon_{33}$ e $2\varepsilon_{23}^2$ e quelli di $2\varepsilon_{31} \varepsilon_{12}$ e $\varepsilon_{11} \varepsilon_{23}$; quest'ultima condizione è immediatamente soddisfatta essendo nulli i due coefficienti, mentre la prima fornisce la relazione di Cauchy $\lambda = \mu$ fra le costanti di Lamé.

Tralasciando di ripercorrere gli sviluppi successivi in cui Poincaré deriva l'espressione delle tensioni dal potenziale delle forze interne, per poi ritrovarle partendo dall'usuale definizione in termini molecolari, occorre riconoscere alla precedente trattazione il merito della chiarezza e della generalità. Non a caso, essa costituisce un frequente riferimento presso quegli studiosi più attenti ai precedenti della disciplina. Ancor più significativo ci sembra, però, il nuovo approccio metodologico in essa assunto. Non solo i limiti della vecchia teoria molecolare sono superati senza più segni d'imbarazzo, giungendo a quel perfetto accordo formale con l'impostazione continuista che è il marchio di garanzia per risultati ottenuti da due alternative ipotesi "indifferenti", ma lo stesso lussureggiante apparato

²⁵⁰ Poincaré H., *Leçons sur la théorie de l'élasticité, redigées par MM. Emil Borel et Jules Drach*, Paris, 1892, pp. 50-54.

di congetture sulla struttura della materia, spinto da Poisson alle estreme conseguenze nella sua opposizione alle astrattezze della *Mécanique analytique* lagrangiana, diviene superfluo quando ci si accontenti di attingere pari generalità semplicemente abbandonando ipotesi ristrette sul potenziale delle forze molecolari. Portando ai suoi esiti ultimi questa linea di pensiero, Duhem doveva arrivare di lì a poco ad un verdetto di definitiva condanna dell'ambizioso programma di Poisson: «[l]orsqu'une théorie, pour se défendre, multiplie ainsi les ruses et les chicanes, il est inutile de la poursuivre, car elle devient insaisissable; mais il serait oiseux de la saisir, car, pour tout esprit juste, c'est une doctrine vaincue. Telle est la *Mécanique physique*»²⁵¹.

III.2. Il contributo di Voigt per una nuova *Fernwirkungstheorie*.

Il severo giudizio di Duhem sulla *Mécanique physique* di Poisson va opportunamente interpretato alla luce della sua convinta opposizione ad ogni riduzionismo meccanicista, in nome della quale il fisico ed epistemologo francese ha coerentemente propugnato la necessità di fondare lo studio delle scienze fisiche su leggi generali d'origine sperimentale, come quella dell'equivalenza tra calore e lavoro governante la sua prediletta Termodinamica.

A recuperare in pieno il vecchio programma di Poisson, aggiornandolo alle definitive acquisizioni in campo sperimentale, doveva essere invece Woldemar Voigt, al quale si suole non a caso attribuire il ruolo di fondatore della Fisica dello stato solido in conseguenza delle sue capitali ricerche sui cristalli raccolte nel celebre *Lehrbuch der Krystallophysik* del 1910.

In particolare, delle caratteristiche elastiche dei cristalli cubici del salgemma il giovane Voigt si era già occupato sin dal 1874 nella sua tesi di laurea²⁵², svolta a Königsberg sotto la guida di Fr. Neumann. Nuove determinazioni²⁵³ delle costanti elastiche del salgemma

251 Duhem P., *L'évolution de la Mécanique*, Paris, 1903, p. 83.

252 Voigt W., "Bestimmung der Elasticitätsconstanten des Steinsalzes", *Annalen der Physik und der Chemie*, 159, 601-616, 1876. Ricordiamo qui che la notazione matriciale di Voigt per le componenti di tensione, di deformazione e per le costanti elastiche prevede le seguenti corrispondenze fra gli indici:

notazione tensoriale	11	22	33	23,23	31,13	12,21
notazione matriciale	1	2	3	4	5	6

Nella notazione matriciale usualmente utilizzata da Voigt le relazioni di Cauchy si scrivono:

$$c_{44} = c_{23} \quad c_{55} = c_{31} \quad c_{66} = c_{12} \quad c_{56} = c_{14} \quad c_{64} = c_{25} \quad c_{45} = c_{36} .$$

Applicando l'inesatta teoria torsionale di Neumann, Voigt è inizialmente pervenuto ai valori seguenti per le tre costanti del cristallo cubico del salgemma: $c_{11} = 8300 \text{ kg/mm}^2$, $c_{12} = 1292$, $c_{44} = 5300$. Otto anni dopo, nel 1884, egli ha utilizzato la teoria di Saint-Venant trovando $c_{11} = 4600$, $c_{12} = 1260$, $c_{44} = 1190$, valori sostanzialmente confermantici la relazione di Cauchy $c_{12} = c_{44}$, effettivamente verificata per tale cristallo.

253 Voigt W., "Neue Bestimmungen der Elasticitätsconstanten von Steinsalz und Flussspath", *Sitz.ber. Akad. Wiss. Berlin*, 989-1004. Dopo aver corretto i risultati del 1874 sulla base della teoria di Saint-Venant, Voigt ne ha ripetuto l'applicazione per queste nuove misure a flessione e torsione trovando:

e di un altro composto del sistema cubico, la fluorite, vennero da lui compiute all'indomani del trasferimento a Göttingen nel 1883, di poco precedute da alcune indagini sulle proprietà isotrope del vetro²⁵⁴, dalle quali era emerso un sensibile disaccordo rispetto alle previsioni della teoria molecolare, apparentemente confermata dalle precedenti misurazione ottiche di Cornu²⁵⁵.

Gli esiti di queste prime ricerche, condensati nelle *Vorlesungen* di Neumann del 1885²⁵⁶, non dovevano peraltro dimostrarsi decisivi per la definitiva messa al bando della vecchia teoria operata dal fisico tedesco negli anni immediatamente a venire; non solo, infatti, i suoi risultati sulla fluorite erano in contraddizione con quelli ottenuti poco tempo prima dall'allievo Klang²⁵⁷, ma anche per i solidi isotropi le contemporanee esperienze di Cantone²⁵⁸ e di Amagat²⁵⁹ sembravano confermare il valore teorico $\nu = 1/4$ per il rapporto di Poisson.

per il salgemma: $c_{11} = 4753 \text{ kg/mm}^2$, $c_{12} = 1292$, $c_{44} = 1313$, confermanti la relazione di Cauchy $c_{12} = c_{44}$;
per la fluorite: $c_{11} = 1450 \text{ kg/mm}^2$, $c_{12} = 2300$, $c_{44} = 3400$.

254 Voigt W., "Ueber das Verhältnis der Quercontraction zur Längendilatation bei Stäben von isotropem Glas", *Annalen der Physik und Chemie*, **15**, 497-513, 1882. Intendendo sconfessare la congettura di Cornu per la quale il riscontro della trasparenza del vetro sarebbe prova della sua isotropia, Voigt ha mostrato che si può risolvere la questione estraendo i campioni di vetro con differenti orientazioni e a differenti profondità dalla lastra d'origine per poi sottoporli a prove di flessione e torsione. Il "greenish glass" da lui sperimentato si è rilevato effettivamente isotropo, non mostrando colore in luce polarizzata, ma i risultati ottenuti sul modulo di Poisson sono stati discordi dalla previsione della teoria molecolare, variando fra 0,213 e 0,218. Secondo Bell (op. cit., p. 217) Voigt avrebbe così stabilito sperimentalmente che l'argomento di Cornu è inammissibile.

255 Cornu A., "Méthode optique pour l'étude de la déformation de la surface extérieure des solides élastiques", *Comptes rendus*, **69**, II sem., 333-337, 1869. Applicando il metodo ottico di Fizeau per la misura delle deformazioni, Cornu si è proposto la soluzione «d'une question fondamentale dans la théorie mathématique de l'élasticité» (p. 334), e cioè la determinazione del coefficiente ν di Poisson attraverso la misurazione ottica del rapporto fra i raggi principali di curvatura di una trave inflessa di sezione costante. «Ce problème, abordé expérimentalement par Cagniard-Latour, Wertheim et M. Kirchhoff, n'a pas été définitivement résolu, car on conclut généralement de leurs recherches que le rapport précédent varie d'une substance à l'autre, même quand ces substances jouiraient de l'homogénéité isotrope parfaite. Je conclus au contraire que, comme l'avait établi Navier, en créant la théorie de l'élasticité sur des bases imparfaites, et comme l'a démontré depuis M. de Saint-Venant d'une manière rigoureuse, ce rapport est le même pour les corps vraiment isotropes et que sa valeur est représentée par le nombre $\frac{1}{4}$ » (p. 334): Cornu ha trovato, in media, $\nu = 0,237$. Nonostante il credito attribuito a queste esperienze da Saint-Venant, o forse proprio per questo, Bell parla di Cornu come di un «theory-dominated experimentalist», pur sottolineando l'importanza e la precisione della nuova tecnica sperimentale basata sull'interferenza ottica.

256 Neumann Fr., *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers*, herausgegeben von Oskar Emil Meyer, Leipzig, 1885, pp. 201-202.

257 Klang H., "Die Elasticitätsconstanten des Flußspathes", *Annalen der Physik und Chemie*, **12**, 321-335. L'autore trova, per la fluorite (sistema cubico): $c_{11} = 1320 \text{ kg/mm}^2$, $c_{12} = 4250$, $c_{44} = 3300$. Rispetto ai valori di Voigt risalta la singolare incongruenza $c_{12} > c_{44}$.

258 Cantone M., "Nuovo metodo per la determinazione delle due costanti di elasticità", *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, IV ser., **4**, 220-227; 292-297, 1888. Si tratta in realtà di esperienze piezometriche analoghe a quelle contemporanee di Amagat e a quelle compiute da Wertheim 40 anni prima. Usando vetro di Turingia, Cantone ottiene per il rapporto di Poisson valori compresi tra 0,246 e 0,256, ed afferma che le sue

La svolta decisiva va in realtà reperita nelle nuove ricerche intraprese fra il 1887 ed il 1889 su solidi di note proprietà anisotrope appartenenti a diversi sistemi cristallini²⁶⁰. Tali ricerche, a tutt'oggi annoverate fra le più precise fra quelle eseguite con metodi statici, hanno evidenziato in maniera risolutiva una più o meno marcata deviazione dalle relazioni di Cauchy, facendo risolvere Voigt a favore della natura non centrale delle azioni molecolari nella maggior parte dei solidi cristallini.

misure hanno finalmente posto fine alla controversia sulla teoria molecolare confermandone la validità (cfr. Bell, p. 282).

259 Amagat É. H., "Sur la vérification expérimentale des formules de Lamé et la valeur de coefficient de Poisson", *Comptes rendus*, **106**, 479-482, 1888. Si tratta di esperienze con piezometri di acciaio e bronzo: per l'acciaio Amagat trova ν variabile fra 0,2609 e 0,2620, per il bronzo fra 0,3190 e 0,3204. Poiché per l'acciaio il valore è prossimo allo 0,25 teorico, egli conclude per la sua perfetta isotropia; per il bronzo, invece, l'eccessiva discrepanza è attribuita a difetti di fabbricazione; "Recherches sur l'élasticité des solides", *Comptes rendus*, **108**, 1199-1202, 1889. Questa breve nota è interessante poiché l'autore parla di solidi imperfetti per quei corpi che non rispettano la condizione $\nu = 0,25$ ed afferma, nella traduzione di Bell: «The perfect solid (...) in which ν should be rigorously 0,25, would thus be one that realizes the double condition of being at one and the same time perfectly elastic and perfectly isotropic» (Bell, p. 278): l'idea riflette chiaramente la concezione inglese per la quale la "perfetta solidità" corrisponderebbe a $\nu = 0,25$. Bell critica però l'affermazione di Amagat ricordando che Voigt (1882) aveva mostrato per il vetro (elastico e isotropo) un valore decisamente inferiore a quello teorico.

260 Voigt W., "Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Beryll und Bergkrystall", *Annalen der Physik und Chemie*, **31**, 474-501; 701-724, 1887. Voigt trova, per il berillo (sistema esagonale)

$$c_{11} = 27460 \text{ kg/mm}^2 \quad c_{12} = 9800 \quad c_{13} = 6740 \quad c_{33} = 24090 \quad c_{44} = 6660,$$

e conclude che, come previsto dalla teoria di Poisson, le costanti distinte si riducono a tre sussistendo le relazioni $c_{13} = c_{44}$, $c_{11} = 3c_{12}$, per cui «man darf den Schluss ziehen, dass bei Beryll die Polarität der Moleküle nur schwach ist, und man eine bedeutende Annhörung an die Wirklichkeit erhält, wenn man sie völlig ignoriert» (p. 493).

Per il quarzo (sistema trigonale)

$$c_{11} = 8680 \text{ kg/mm}^2 \quad c_{12} = 700 \quad c_{33} = 10740 \quad c_{13} = 438 \quad c_{44} = 5820 \quad c_{14} = 1715$$

Per la teoria molecolare dovrebbe essere $c_{13} = c_{44}$, $c_{11} = 3c_{12}$; benché Voigt ammetta come incerti tali risultati sperimentali, egli osserva che «man wird also di Moleküle des Bergkristalls mit sehr starker Polarität versehen denken müssen» (p.721);

"Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Topas und Baryt", *Annalen der Physik und Chemie*, **34**, 981-1028, 1888. Voigt trova,

per il topazio (sistema trimetrico)

$$c_{11} = 28700 \quad c_{22} = 35600 \quad c_{33} = 30000 \quad c_{44} = 11000 \quad c_{55} = 13500 \quad c_{66} = 13400 \quad c_{23} = 9000 \quad c_{31} = 8600 \quad c_{12} = 12800;$$

per la teoria molecolare dovrebbe essere $c_{44} = c_{23}$, $c_{55} = c_{31}$, $c_{66} = c_{12}$: tali relazioni non sono verificate.

Per la barite (sistema trimetrico)

$$c_{11} = 9070 \quad c_{22} = 8000 \quad c_{33} = 10740 \quad c_{44} = 1220 \quad c_{55} = 2930 \quad c_{66} = 2830 \quad c_{23} = 2780 \quad c_{31} = 2750 \quad c_{12} = 4680;$$

delle precedenti relazioni di Cauchy è approssimativamente verificata solo la relazione $c_{55} = c_{31}$;

"Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Flussspath, Pyrit, Steinsalz, Sylvin", *Annalen der Physik und Chemie*, **35**, 642-661, 1888. Voigt trova,

per la fluorite (sistema cubico):

$$c_{11} = 16700 \text{ kg/mm}^2 \quad c_{12} = 4570 \quad c_{44} = 3450;$$

per la pirite (sistema cubico)

$$c_{11} = 36800 \text{ kg/mm}^2 \quad c_{12} = -4830 \quad c_{44} = 10750;$$

per il salgemma (sistema cubico)

$$c_{11} = 4770 \text{ kg/mm}^2 \quad c_{12} = 1320 \quad c_{44} = 1290;$$

per il cloruro di potassio o silvina (sistema cubico)

$$c_{11} = 3750 \text{ kg/mm}^2 \quad c_{12} = 1980 \quad c_{44} = 655$$

Tale convinzione è sviluppata dall'autore nei suoi “Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle”²⁶¹, configuranti una rinnovata teoria delle azioni a distanza (*Fernwirkungstheorie*) densa di notevoli prospettive. Riesumando la concezione di Poisson per la quale le molecole, intese come particelle di dimensioni finite, si scambierebbero azioni dipendenti dalla direzione, Voigt osserva che, oltre a tali forze polari (polare Kräfte), le molecole devono scambiarsi anche dei momenti; la formazione regolare di un cristallo sarebbe infatti concepibile solo ammettendo che un momento direttore agisce sulla particella che va ad associarsi alla struttura già formata, conferendole un'orientazione parallela a quella delle particelle facenti parte dell'edificio cristallino.

Su questa fondamentale premessa, Voigt ottiene per la prima volta le equazioni d'equilibrio dei corpi micropolari attribuite usualmente ai fratelli Cosserat²⁶²

$$(III.2.1) \quad \sigma_{ij,i} + F_j = 0$$

$$(III.2.2) \quad \mu_{ij,i} + \delta_{jkh} \sigma_{hk} + M_j = 0 ,$$

ove $\mu_{ij,i}$ sono i micromomenti (Momentendrucke), F_j e M_j rispettivamente le forze e i momenti di volume e δ_{jkh} è l'alternatore di Ricci.

In queste formule, tensioni e micromomenti in un punto (x_1, x_2, x_3) su una superficie s avente per normale, ad esempio, l'asse x_1 , sono definiti da Voigt in termini strettamente molecolari, rispettivamente come risultanti delle azioni e dei momenti delle azioni esercitate dalle molecole poste dal lato positivo del piano contenente la superficie s su quelle incluse in un cilindro di altezza pari al raggio d'attività molecolare elevato dal lato negativo. Conformemente al modello, Voigt affianca alle tre traslazioni infinitesime u_i ($i = 1, 2, 3$) le tre rotazioni molecolari infinitesime l_i (supposte costanti entro la sfera d'attività molecolare), associando ad ogni particella una terna d'assi ortogonali mobili con essa; l'usuale trattamento delle sommatorie esprimenti le componenti di tensione nello stato deformato, nel quale gli assi mobili hanno ruotato rispetto alla terna fissa, conduce allora alle nove distinte componenti della forma

$$(III.2.3) \quad \sigma_{11} = D_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + D_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + l_3 \right) + D_{13} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - l_2 \right) +$$

²⁶¹ Voigt W., “Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle”, *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, **34**, 3-100, 1887; in particolare la parte I, “Ableitung der Grundgleichungen aus der Annahme mit Polarität begabter Moleküle”. Tale lavoro é riportato in forma pressoché invariata nel *Lehrbuch der Kristallphysik*, Leipzig, 1928¹¹, pp. 596-616.

²⁶² Cosserat E. e F., *Théorie des corps déformables*, Paris, 1909. Alla pagina 137 gli autori ricordano lo studio anticipatore di Voigt.

$$D_{14} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - l_3 \right) + D_{15} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + D_{16} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + l_1 \right) +$$

$$D_{17} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + l_2 \right) + D_{18} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - l_1 \right) + D_{19} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad \text{e analoghe,}$$

nelle quali si distinguono 45 coefficienti D_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 9$).

Per quanto riguarda i micromomenti, Voigt osserva, come già aveva fatto Cauchy, che essi sono infinitesimi rispetto alle tensioni, poiché nelle somme che definiscono i loro coefficienti le variazioni delle coordinate Δx_i entrano con potenze superiori a quelle presenti nei corrispondenti coefficienti D_{ij} delle tensioni. Ciò consente di ridurre le equazioni di equilibrio alla rotazione nella forma

$$(III.2.4) \quad \delta_{jhk} \sigma_{hk} + M_j = 0,$$

e di trarre da queste ultime le componenti l_i , o meglio, le tre differenze

$$(III.2.5) \quad l_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad l_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad l_3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

fra le rotazioni effettive e quelle $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ connesse alla traslazione, in funzione delle componenti di deformazione $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. Senza ledere la generalità delle conclusioni, si può supporre nulli i momenti di volume ed ottenere, una volta introdotte le espressioni delle suddette differenze nelle (III.2.3), l'usuale forma delle componenti di tensione

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk} \varepsilon_{hk}$$

nella quale i nuovi coefficienti c_{ijhk} non soddisfano più le relazioni di Cauchy pur godendo delle simmetrie maggiori e minori.

Nell'importante Rapporto su "L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux" presentato in occasione del Congresso di Fisica di Parigi nell'agosto 1900, Voigt si è premurato di mostrare il perfetto accordo di tali conclusioni con quelle della *Nahwirkungstheorie*, come egli ha denominato la teoria delle azioni a contatto per distinguerla dall'opposta *Fernwirkungstheorie*. Quest'ultima però, «permet de dépasser à un point de vue important ces résultats de la théorie des actions immédiates. Puisque dans celle-là les paramètres peuvent être calculés, en partant de la loi des actions moléculaires et de la répartition des molécules dans l'espace, on peut, par des hypothèses particulières sur cette loi et cette répartition, établir des relations particulières entre les paramètres élastiques et comparer les résultats avec l'expérience. Les observations peuvent ainsi servir à l'examen de

certaines hypothèses particulières et, par suite, au développement de nos idées sur les actions moléculaires»²⁶³.

La più importante di tali ipotesi particolari è quella che considera le azioni «*coïncidant avec la droite joignant les molécules et fonctions des distances seulement*»²⁶⁴; in tal caso, per usare l'espressione di Voigt, le molecole sarebbero prive di polarità e si ricadrebbe nei limiti della teoria rari-costante sconfessati dall'esperienza. Ora, però, se il ricorso all'ipotesi delle azioni polari consente di pervenire ad una teoria molecolare in accordo coi dati sperimentali per i solidi cristallini, come giustificare il fallimento della relazione di Cauchy $c_{1122} = c_{1212}$ prevista per i corpi isotropi? Se, infatti, li si considera come assemblaggi di particelle disposte secondo tutte le possibili orientazioni, occorre concludere che la dipendenza delle azioni dalla direzione non può avere alcuna influenza sul loro valore risultante in base al quale si definisce la tensione; in pratica, si potrebbe sostituire alle forze variabili con la direzione una forza media uniforme, ritrovando così la relazione obbligata fra le due costanti d'isotropia.

Voigt non esita però ad abbandonare tale concezione: «*[t]ous les métaux*», osserva basandosi sui dati cristallografici, «*presque toutes les roches compactes se présentent immédiatement comme des accumulations de cristaux de grandeur variant avec les circonstances, qui sont juxtaposés dans toutes les orientations possibles; dans d'autres corps, par exemple dans certaines espèces de verre, la même structure est rendue visible par la corrosion d'une surface polie. On peut donc admettre qu'une structure de cette espèce, appelée quasi-isotrope, est la règle dans la nature*»²⁶⁵. Ora, se tali individui cristallini casualmente orientati sono grandi rispetto alla sfera d'attività molecolare, pur risultando piccolissimi rispetto alle dimensioni del corpo, si può pensare di calcolare i valori delle tensioni e delle costanti elastiche dei corpi quasi-isotropi partendo dalla conoscenza di quelli relativi al cristallo omogeneo. In breve, le tensioni in un punto di un corpo quasi-isotropo su un elemento di superficie comunque preso al suo interno, «*peuvent être égalées à la moyenne arithmétique des valeurs que prennent les composantes analogues dans le cristal homogène pour toutes les orientations possibles de l'élément de surface*»²⁶⁶.

²⁶³ Voigt W., "L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux", Rapport présenté au Congrès international de Physique réuni à Paris en 1900, 1-71, Paris, 1900, pp. 24-25. Anche in tedesco col titolo "Die gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Krystallelasticität". Referat für den internationalen physikalischen Congreß in Paris vom 6. bis 12. August 1900, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 117-176, 1900.

²⁶⁴ Ibidem, p. 25.

²⁶⁵ Ibidem, pp. 63-64.

²⁶⁶ Ibidem, p. 64.

A tal fine, è sufficiente formare le espressioni $\sigma_{ij} = c_{ijhk} \varepsilon_{hk}$ per tutte le possibili direzioni del sistema d'assi x_i rispetto agli assi principali d'elasticità x_i^0 del cristallo omogeneo e farne poi la media; Voigt ha mostrato²⁶⁷ che tale trattamento sfocia nelle nuove espressioni

$$(III.2.6) \quad \sigma_{11} = \langle c_{1111} \rangle \varepsilon_{11} + \langle c_{1122} \rangle (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad \sigma_{23} = 2\langle c_{1212} \rangle \varepsilon_{23} ,$$

ove i coefficienti elastici medi risultano

$$(III.2.7) \quad \begin{aligned} \langle c_{1111} \rangle &= \frac{1}{5} (3A + 2B + 4\Gamma) \\ \langle c_{1122} \rangle &= \frac{1}{5} (A + 4B - 2\Gamma) \\ 2\langle c_{1212} \rangle &= \frac{1}{5} (2A - 2B + 6\Gamma) \end{aligned}$$

con

$$(III.2.8) \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{3} (c_{1111}^0 + c_{2222}^0 + c_{3333}^0) \\ B &= \frac{1}{3} (c_{2233}^0 + c_{3311}^0 + c_{1122}^0) \\ \Gamma &= \frac{1}{3} (c_{2323}^0 + c_{3131}^0 + c_{1212}^0) \end{aligned}$$

Le quantità A, B, Γ sono le medie delle tre terne delle costanti principali suindicate, le altre 12 non figurando nel caso dei corpi quasi-isotropi. Poiché fra le tre costanti $\langle c_{1111} \rangle, \langle c_{1122} \rangle, \langle c_{1212} \rangle$ deve valere la relazione d'isotropia

$$(III.2.9) \quad \langle c_{1111} \rangle - \langle c_{1122} \rangle = 2\langle c_{1212} \rangle ,$$

il loro numero si riduce a due effettivamente distinte. L'ulteriore relazione (di Cauchy)

$$(III.2.10) \quad \langle c_{1122} \rangle = \langle c_{1212} \rangle$$

prevista dall'antica teoria non è invece soddisfatta; in effetti, osserva Voigt, «ce n'est que dans le cas où les molécules des individus cristallins ne possèdent pas de polarité et où, par conséquent, les formules de Poisson et Cauchy

$$c_{2323}^0 = c_{2233}^0, \quad c_{3131}^0 = c_{3311}^0, \quad c_{1212}^0 = c_{1122}^0$$

²⁶⁷ Voigt W., "Theoretische Studien ...", pp. 47-52.

sont valables, que $B = \Gamma$ et, par suite,

$$\langle c_{1122} \rangle = \langle c_{1212} \rangle \qquad \langle c_{1111} \rangle = 3\langle c_{1122} \rangle \gg^{268}.$$

L'importanza di questi risultati è davvero notevole. Sconfessando il metodologico scetticismo di Duhem, Voigt è stato in grado di pervenire all'accordo formale tra *Nahwirkungstheorie* e *Fernwirkungstheorie* sulla base di plausibili ipotesi sulla natura delle forze molecolari ed attraverso il trattamento dell'idea di quasi-isotropia. Non solo, però: la filosofia soggiacente a tale trattamento ha rivelato tutta la sua portata nel quadro delle moderne tecniche di omogeneizzazione dei materiali eterogenei sviluppate in ambito continuista a partire dagli anni '60, allorquando il rapporto fra micro e macro-meccanica è tornato a proporsi all'attenzione degli studiosi della *Scienza dei Materiali*. È proprio in quegli anni che, da fronti costituzionalmente opposti, le comunità dei fisici e dei meccanici del continuo sono andate stringendo nuove relazioni nel comune proposito di colmare il *gap* fra le due rispettive discipline; tale intento, esplicitamente dichiarato in occasione del Symposium IUTAM del 1967²⁶⁹, avrebbe aperto i nuovi orizzonti della *Meccanica dei mezzi generalizzati* entro il cui spettro le vecchie ricerche di Voigt si collocano quale primo e fondamentale risultato.

Su tali sviluppi torneremo però nel seguito, proponendo due possibili spunti che, muovendo dal contesto delle teorie micropolari, da un lato, e dalle procedure connesse alle tecniche di omogeneizzazione, dall'altro, sono forse in grado di offrire un diverso modo di intendere il raccordo fra impostazione molecolare e continuista dell'elasticità. Ora invece, intendiamo concludere questo succinto esame dell'opera di Voigt discutendo un suo ultimo contributo pienamente in tema con le nostre problematiche.

Ad esso abbiamo già accennato discutendo la linea di pensiero sulla quale Stokes aveva rimosso i limiti della teoria uni-costante partendo dai suoi studi di idrodinamica. Il riferimento ai fluidi perfetti, intesi quali limite nella scala del comportamento materiale che vede all'altro estremo i “solidi perfetti”, è ripreso da Voigt²⁷⁰ nell'analoga ottica di giustificare la variabilità del rapporto fra le due costanti elastiche dei corpi isotropi nel quadro di una rigorosa formulazione molecolare.

268 Voigt W., “Rapport ...”, p. 65.

269 “Mechanics of generalized continua”, *Proceedings of the IUTAM Symposium on the generalized Cosserat continuum and the continuum theory of dislocations with applications, Freudenstadt 18-31 agosto, and Stuttgart 1-2 settembre 1967*, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.

270 Voigt W., “Ueber das numerische Verhältnis der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien nach der molecularen Theorie”, *Annalen der Physik*, IV Folge., 4, 187-196, 1901.

Se, infatti, il concetto di *quasi-isotropia* è in grado di esplicitare tale variabilità per i solidi allo stato cristallino, fondamentalmente diverso è il caso dei corpi *effettivamente isotropi*, per i quali, cioè, non è concepibile che le proprietà meccaniche discendano dalla casuale orientazione in ogni punto dei minuti frammenti a struttura regolare. Ora, osserva Voigt, per i primi (e sempre nel quadro di una teoria lineare), si suole rappresentare gli spostamenti relativi fra due punti immediatamente prossimi l'un l'altro con l'usuale espressione

$$(III.2.11) \quad \Delta u_i = \varepsilon_{ij} \Delta x_j$$

Tale forma, che ben esprime la regolarità degli spostamenti secondo la *Nahwirkungstheorie*, è però fondamentalmente incompleta nell'ambito del discreto; lecita per i solidi elastici ideali (*ideale fest-elastische Körper*), poiché un reticolo (primitivo) di molecole subisce una deformazione omogenea corrispondente a quella dei punti del continuo, essa non rispecchia affatto il comportamento dei mezzi dotati di una certo grado di fluidità (*Grad von Fluidität*) e, in particolare, dei liquidi ideali, le cui molecole devono pensarsi a tal punto libere nel loro movimento da ripristinare, per qualsiasi deformazione, una distribuzione in grado di offrire la stessa indifferenza di comportamento secondo diverse direzioni.

Per tali mezzi, Voigt generalizza lo schema (III.2.11) nella forma

$$(III.2.12) \quad \begin{aligned} \Delta u_1 &= \varepsilon_{11} \xi_1 + \varepsilon_{22} \xi_2 + \varepsilon_{33} \xi_3 + \varepsilon_{23} \xi_4 + \varepsilon_{31} \xi_5 + \varepsilon_{12} \xi_6 \\ \Delta u_2 &= \varepsilon_{11} \eta_1 + \varepsilon_{22} \eta_2 + \varepsilon_{33} \eta_3 + \varepsilon_{23} \eta_4 + \varepsilon_{31} \eta_5 + \varepsilon_{12} \eta_6 \\ \Delta u_3 &= \varepsilon_{11} \zeta_1 + \varepsilon_{22} \zeta_2 + \varepsilon_{33} \zeta_3 + \varepsilon_{23} \zeta_4 + \varepsilon_{31} \zeta_5 + \varepsilon_{12} \zeta_6 \end{aligned}$$

ove ξ_i, η_i, ζ_i ($i = 1, \dots, 6$) sono funzioni delle coordinate. Il caso elementare dei liquidi offre immediatamente

$$(III.2.13) \quad \Delta u_i = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \Delta x_i \quad i = 1, 2, 3$$

per cui, introducendo tali valori nella formule esprimenti le componenti di tensione (definite in termini molecolari), Voigt perviene alle attese relazioni

$$(III.2.14) \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{5}{3} \gamma_1 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0,$$

le quali risultano come ovvia conseguenza di quelle (bi-costanti) della teoria fenomenologica

$$(III.2.15) \quad \sigma_{11} = c_{1111} \varepsilon_{11} + c_{1122} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad \sigma_{23} = (c_{1111} - c_{1122}) \varepsilon_{23},$$

quando vi si ponga, come è per i liquidi, $c_{1111} = c_{1122} = \frac{5}{3} \gamma_1$.

In conclusione, Voigt suggerisce una sorta di classificazione del comportamento isotropo per la quale i corpi perfettamente fluido-elastici (*vollkommen elastisch-flüssig*)

risponderebbero alle (III.2.13), quelli perfettamente solido-elastici (*vollkommen elastisch-fest*) alle (III.2.11), e, infine, quelli *reali* a comportamento intermedio fra i due casi limite (per i quali Voigt conia la denominazione di corpi *von unvollkommer Festheit*) soddisferebbero le combinazioni

$$(III.2.16) \quad \Delta u_i = \beta (\varepsilon_{21} \Delta x_1 + \varepsilon_{22} \Delta x_2 + \varepsilon_{23} \Delta x_3) + \frac{1}{3} (1-\beta) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \Delta x_i$$

In sostanza, un corpo ad incompleta rigidità si dirà *fest-elastisch* nella proporzione β e *flüssig-elastisch* nella proporzione $(1-\beta)$; le componenti di tensione ad esso relativo divengono allora

$$(III.2.17) \quad \sigma_{11} = \beta \gamma_1 (3\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + \frac{5}{3} \gamma_1 (1-\beta) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad \sigma_{23} = 2\beta \gamma_1 \varepsilon_{23},$$

soddisfacendo così lo schema bi-costante delle (III.2.15) qualora si ponga

$$(III.2.18) \quad c_{1111} = \gamma_1 [3\beta + \frac{5}{3} \gamma_1 (1-\beta)] \quad c_{1122} = \gamma_1 [\beta + \frac{5}{3} \gamma_1 (1-\beta)]$$

In tal modo, tra le costanti c_{1111} e c_{1122} non sussisterebbe alcuna relazione determinata poiché il loro rapporto verrebbe a dipendere dal grado β di *Festheit*, risultando variabile da 1 a 3. In questa suggestiva soluzione è evidente il proposito di aggiornare le concezioni con le quali gli autori inglesi avevano inteso giustificare l'origine della bi-costanza: un conclusivo richiamo a Thomson ne è una riprova indiretta. Ci sembra difficile, però, ravvisare nel riferimento alla piú ricca cinematica espressa dalle (III.2.16) una sostanziale novità rispetto alle conclusioni di Stokes. È infatti sufficiente riscrivere la prima delle (III.2.17) nella forma

$$(III.2.19) \quad \sigma_{11} = 2\beta \gamma_1 (\varepsilon_{11} - \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3}) + \frac{5}{3} \gamma_1 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

per riconoscervi la perfetta corrispondenza con la (II.2.1a) di Stokes.

III. 3. La *Dynamik der Kristallgitter* nell'opera di Born.

In una bella pagina di reminiscenze sulle proprie ricerche giovanili letta in occasione della Conferenza Internazionale sulla *Lattice Dynamics*²⁷¹ tenutasi a Copenhagen nel 1963, Born ricorda come nei primi decenni del secolo fosse ancora pressante la necessità di

²⁷¹ Born M., "Reminiscences of my Work on the Dynamics of Crystal Lattices", *Proceedings of the International Conference on Lattice Dynamics held at Copenhagen, Denmark, August 5-9, 1963*, 1-7, Oxford, 1965.

assicurare un accordo formale fra l'impostazione atomica e quella fenomenologica dell'elasticità. In quel periodo, Göttingen costituiva un centro d'avanguardia nella ricerca sulla fisica dei solidi: non solo Voigt vi aveva promosso le innovative indagini sulle proprietà dei cristalli, giungendo ai primi esiti risolutivi che abbiamo appena ripercorso, ma lo stesso Born, dal 1912 *Privatdozent* presso l'Università cittadina, era in procinto di avviare i nuovi e fondamentali studi ai quali la *Teoria dei reticoli* deve, a tutt'oggi, il suo intero impianto. A dare sensibile impulso alle nuove ricerche dovevano inoltre contribuire, da un lato, le decisive conferme della perfetta regolarità della struttura cristallina, consentite dalle indagini di M. von Laue (1912) e dei Bragg padre e figlio (1913) sulla diffrazione dei raggi X nei cristalli, dall'altro, l'intensa concentrazione di studi che avrebbe portato di lì a poco alla definizione del modello atomico di N. Bohr (1913).

È in tale contesto che si collocano i primi lavori di Born sul comportamento dinamico di reticoli cubici del tipo del salgemma²⁷² e del diamante²⁷³; in essi, l'idea di Thomson di limitare le interazioni ai soli primi e secondi vicini di ogni atomo è sviluppata scrivendo le equazioni del moto per il generico atomo soggetto alle azioni dei suddetti vicini e confrontandole con le corrispondenti equazioni per il continuo, in modo da trarre le relazioni fra le costanti di forza e le costanti elastiche e giudicare così sulla “bontà” del modello discreto; tale procedura è esattamente quella già percorsa nel paragrafo II.4 ed evitiamo quindi di porvi nuova attenzione. Va però sottolineato come l'opportuna rappresentazione delle forze agenti fra i singoli atomi consenta di dar conto, in maniera più o meno soddisfacente, dei vari tipi di legame governanti la coesione della materia, riflettendosi direttamente sulla definizione delle proprietà elastiche. In questo senso, il superamento delle relazioni di Cauchy, definitivamente bandite dal quadro della meccanica del continuo, è riemerso quale “problema” nelle trattazioni dei fisici moderni, poiché ogni nuovo modello deve poter giustificare la loro rimozione ogni qual volta la struttura del cristallo e la natura del legame chimico non siano tali da prevederne la validità.

Senza addentrarci nella fiorita letteratura sviluppatasi sull'argomento²⁷⁴, vogliamo invece discutere i tratti fondamentali della teoria generale dei reticoli cristallini, definita da

²⁷² Born M., von Kármán Th., “Über Schwingungen in Raumgittern”, *Physikalische Zeitschrift*, **13**, 297-309, 1912. Born M., “Zur Raumgittertheorie des Diamanten”, *Annalen der Physik*, **44**, IV Folge., 605-642, 1914.

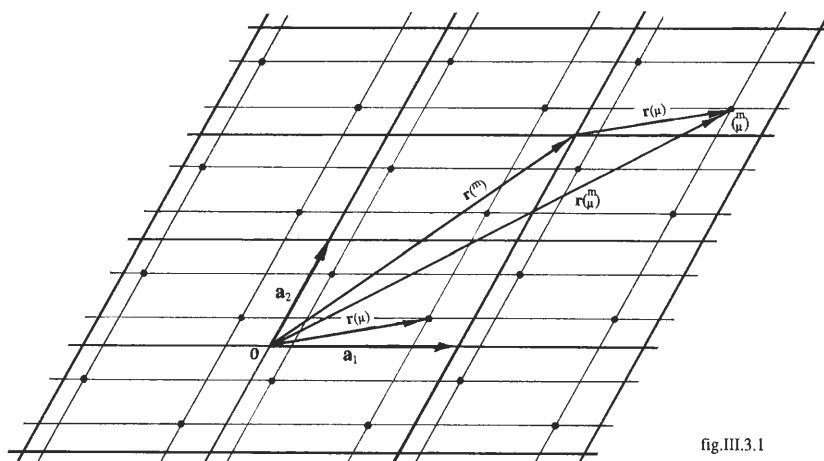
²⁷³ Born M., “Zur Raumgittertheorie des Diamanten”, *Annalen der Physik*, **44**, IV Folge., 605-642, 1914.

²⁷⁴ P. C. Fine (1939), E. Kellermann (1940) e R. B. Leighton (1948) hanno estesamente applicato la teoria di Born e von Kármán ai cristalli cubici a corpo centrato (bcc) e a facce centrate (fcc), limitandosi alle interazioni fra i soli primi e secondi vicini per l'effetto schermante che essi hanno sull'azione degli atomi più distanti. H. M. J. Smith (1948) ha ampliato la trattazione di Born per il diamante includendo interazioni centrali fra i secondi vicini. G. Leibfried e W. Brenig (1953) e Bathia (1955) hanno trattato i reticoli dei solidi metallici considerando la presenza del gas elettronico. Superando l'idea degli ioni rigidi sulla quale i precedenti sono basati, B. J. Dick e A. W. Overhauser (1958) hanno per primi introdotto il *shell model* per il trattamento dei cristalli ionici e covalenti, associando al nucleo rigido un guscio elettronico ad esso collegato attraverso legami

Born nel suo impianto complessivo fin dal 1915²⁷⁵ e poi perfezionata in una serie di lavori successivi²⁷⁶ culminanti nella classica *Dynamical Theory of Crystal Lattices*²⁷⁷ del 1954.

Born considera un insieme di particelle, o meglio, ioni, formanti un reticolo del tutto generico, ciascuno dei quali è individuato, a partire da un'origine qualsiasi O, attraverso il *vettore di cella* (fig.III.3.1)

$$(III.3.1) \quad \mathbf{r}^{(m)} = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + m_3 \mathbf{a}_3$$



ove \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$) sono i vettori che definiscono la cella elementare d'origine, m_i sono numeri interi individuanti il generico punto di coordinate (m_1, m_2, m_3) e variabili da $-\infty$ a $+\infty$ se si suppone il reticolo illimitato: è questa l'usuale definizione di un reticolo semplice (o primitivo o di Bravais). Se nella cella elementare d'origine sono comprese z particelle, la μ -esima fra

schematizzati da molle lineari. Sviluppi in questa direzione sono dovuti a W. Cochran (1959) e R. A. Cowley *et al.* (1963). L'utilizzo di questi modelli si accompagna all'impiego di potenziali empirici per i quali si rimanda ai recenti testi di I. M. Torrens (*Interatomic potentials*, New York, 1972) e di Macpherson A. K. (*Atomic mechanics of solids*, Amsterdam, 1990). Nel quadro di queste modellazioni, seppur da un diverso punto di vista, si inquadrano gli studi di S. Di Pasquale ("Fondamenti teorici per un metodo di calcolo approssimato dei corpi reticolari a maglie cubiche", *Atti Ist. Sc. Cost. Fac. Architettura Un. di Napoli*, 1-66, 1966; "On the elastic problem of the non-homogeneous anisotropic reticulated body resting on a lattice", *Meccanica*, **2**, 153-156, 1967; "Mechanical models of Cauchy-Poisson media", *Atti del 1° Congresso AIMETA, Udine 26-30 Giugno 1971*, **2**, parte II, 299-324, 1971) nei quali è messo a punto un metodo approssimato per determinare lo stato di sforzo in un reticolo partendo dall'assegnazione degli spostamenti in un corrispondente continuo inteso come modello del discreto; poiché il reticolo cubico considerato mette in conto legami centrali coi primi e secondi vicini attraverso la rigidezza delle aste, è provata una volta di più la validità delle relazioni di Cauchy.

²⁷⁵ Born M., *Dynamik der Kristallgitter*, Leipzig-Berlin, 1915.

²⁷⁶ Born M., "Atomtheorie des festen Zustandes", *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, **5**, III, 527-781, 1909-1926. Pubblicato nel 1923 come libro con lo stesso titolo; Born M., Bollnow O.F., "Der Aufbau der Materie. Theoretische Grundlagen", *Handbuch der Physik*, **24**, 370-465, 1927; Born M., Göppert-Mayer M., "Dynamische Gittertheorie der Kristalle", *Handbuch der Physik*, **24**, II, 623-794, 1933 (II ed.).

²⁷⁷ Born M., Huang K., *Dynamical theory of crystal lattices*, Oxford, 1954.

esse è individuata dal *vettore di base* $\mathbf{r}(\mu)$ e la generica particella ($\overset{m}{\mathbf{r}}$) di reticolo è definita dal vettore

$$(III.3.2) \quad \mathbf{r}(\overset{m}{\mu}) = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + m_3 \mathbf{a}_3 + \mathbf{r}(\mu) \quad \mu = 1, 2, \dots, z.$$

La (III.3.2) descrive i reticoli multipli o con base, quest'ultima essendo formata dagli z ioni compresi nella generica cella; come è facile riconoscere, un reticolo con base deriva dall'assemblaggio di z identici reticoli semplici.

Fra i reticoli semplici e quelli multipli esiste però una differenza fondamentale. Come sottolineato da Brillouin in un bel saggio sulla struttura dei solidi²⁷⁸, un punto qualunque di un reticolo semplice è un centro di simmetria (o di inversione), per cui, all'atto di una deformazione omogenea del reticolo, i suoi singoli punti si muovono come i punti omologhi di un continuo: vale, cioè, l'espressione $\Delta u_i = \varepsilon_{ij} \Delta x_j$ utilizzata ricorrentemente da Navier in poi. Per i reticoli multipli, invece, la precedente simmetria non ha luogo in generale; in tal caso, osserva Brillouin, «lorsqu'on déforme le réseau, l'ensemble des particules de première espèce [definite dal vettore $\mathbf{r}(\overset{m}{\mu})$] se déplace comme les points homologues d'un milieu continu; mais les vecteurs de base [$\mathbf{r}(\mu)$] se déplaceront d'une manière différente, et qui dépendra essentiellement des systèmes de forces agissant entre tous les atomes»²⁷⁹. Se, ad esempio, la base del reticolo costituisce una molecola rigida, la distanza fra i suoi punti resta invariata e l'usuale espressione degli spostamenti relativi non è più corretta.

Sarebbe difficile attribuire a Cauchy il riconoscimento di questa circostanza, allorché egli si rifece all'idea di “molecola integrante” per generalizzare la sua iniziale teoria relativa al semplice sistema di punti materiali. Lo stesso Thomson, peraltro, non era andato oltre l'intuizione ravvisando nei reticoli doppi di Bravais la possibilità di rimuovere le relazioni di Cauchy. Anche Voigt, d'altro canto, si era limitato a riscrivere le conclusioni di Stokes attraverso una cinematica apparentemente più complessa. È a Born, in realtà, che va ascritto il primato di quel riconoscimento e la formulazione di una teoria generale inglobante, fra l'altro, la stessa *Fernwirkungstheorie* di Voigt come caso particolare²⁸⁰.

Born suppone, anzitutto, che l'interazione degli ioni sia descritta completamente da un'energia potenziale Φ funzione della loro posizione relativa e, nei limiti

278 Brillouin L., *La structure des corps solides dans la physique moderne*, Paris, 1937.

279 Ibidem, p. 35.

280 Nel lavoro del 1923 (pp. 556-559) Born ha ritrovato la teoria di Voigt supponendo le z particelle di ogni cella invariabilmente collegate fra loro in modo da formare una molecola rigida, esattamente nel senso inteso da Brillouin.

dell'*approssimazione adiabatica*²⁸¹, sviluppa la Φ nelle potenze crescenti degli spostamenti $\mathbf{u}^{(m)}$ degli ioni dalla loro posizione d'equilibrio

$$(III.3.3) \quad \Phi(\mathbf{r}^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)}) = \Phi(\mathbf{r}^{(m)}) + \sum_{m\mu i} \Phi_i^{(m)}(\mu) u_i^{(m)} + \frac{1}{2!} \sum_{m\mu i} \sum_{m\nu j} \Phi_{ij}^{(mn)}(\mu\nu) u_i^{(m)} u_j^{(n)} + \dots$$

In questo sviluppo le costanti di forza (o parametri di accoppiamento)

$$\Phi_i^{(m)} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_i^{(m)}} \quad \Phi_{ij}^{(mn)} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i^{(m)} \partial u_j^{(n)}}$$

hanno un preciso significato: ad esempio, $-\Phi_{ij}^{(mn)} u_j^{(n)}$ è la forza in direzione x_i agente sullo ione (μ) quando lo ione (ν) subisce lo spostamento $u_j^{(n)}$; in particolare, nell'*approssimazione armonica* per la quale la posizione iniziale degli ioni corrisponde al minimo dell'energia, si ha $\Phi_i^{(m)} = 0$ e quindi è nullo il termine del primo ordine dello sviluppo in serie (III.3.3).

Nel lavoro del 1915 Born introduce per la prima volta il concetto di *homogene Verzerrung* per descrivere la piú generale deformazione di un reticolo con base; secondo l'autore, in un tale reticolo un generico ione (μ) di coordinate iniziali $x_j^{(m)}$ subisce uno spostamento di componenti

$$(III.3.4) \quad u_i^{(m)} = u_i(\mu) + u_{i,j} x_j^{(m)},$$

ove il tensore (asimmetrico) $u_{i,j}$ definisce i parametri della deformazione mentre i termini $u_i(\mu)$ individuano gli spostamenti relativi fra i singoli reticoli semplici che tale deformazione può indurre²⁸². L'energia per unità di volume conseguente alla (III.3.4) risulta pertanto

281 Born M., Oppenheimer R., "Zur Quantentheorie der Molekeln", *Annalen der Physik*, IV Folge., **84**, 457-484, 1927. L'*approssimazione adiabatica* rispecchia il fatto che la dinamica degli elettroni può essere separata da quella dei nuclei (ioni) del reticolo in conseguenza delle loro piccolissima massa (massa elett./massa protone=1/1836; quindi massa el./massa nucleo=1/10000). Piú esattamente, la scala dei tempi associata al moto degli elettroni è molto piú piccola di quella associata al moto dei nuclei. Conseguentemente, in prima approssimazione i nuclei appaiono praticamente fissi durante il moto degli elettroni o, viceversa, durante il moto dei nuclei gli elettroni si muovono come se i nuclei fossero pensati fissi nelle loro posizioni istantanee; gli elettroni seguono cioè il moto dei nuclei *adiabaticamente* e non subiscono quindi transizioni da uno stato all'altro; sotto questo profilo, masse, tempi, frequenze ed energie associate ai nuclei sono di un ordine in cui è valida la meccanica classica, mentre la meccanica quantistica diviene essenziale in fenomeni implicanti ridistribuzioni delle densità elettroniche. Nell'ambito di tale approssimazione, gli elettroni provvedono al legame fra i nuclei ma non influenzano altrimenti il loro moto nel reticolo.

282 Nel testo del 1923 Born spiega il significato degli spostamenti relativi $\mathbf{u}(\mu)$ immaginando di sostituire al reticolo un corpo continuo i cui punti «können sichtbare Verrückungen erfahren, die Funktionen der Koordinaten sind, außerdem aber sollen in jedem Volumenelement $3z$ "innere", "unsichtbare" Verrückungen $u_i(\mu)$ vor sich gehen können» (p. 550). Qui Born giustifica l'esistenza di tali spostamenti $\mathbf{u}(\mu)$ richiamando le considerazioni di E. Hellinger ("Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua", *Enc. math. Wiss.*, IV, 4, Leipzig, 1914, p. 609, 623) in merito alla possibilità che gli elementi di volume possano subire «innere

$$(III.3.5) \quad \frac{1}{V} \Phi(\mathbf{r}^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)}) = \frac{1}{V} \Phi_0(\mathbf{r}^{(m)}) + \frac{1}{V} \sum_{m\mu i} \Phi_i^{(m)} u_{i(\mu)} + \frac{1}{V} \sum_{m\mu i j} \Phi_i^{(m)} x_{j(\mu)} u_{i,j} \\ + \frac{1}{2V} \sum_{m\mu i} \sum_{n\nu j} \Phi_{ij}^{(mn)} u_{i(\mu)} u_{j(\nu)} + \frac{1}{V} \sum_{m\mu i k} \sum_{n\nu j} \Phi_{ij}^{(mn)} x_{k(\nu)} u_{j,k} u_{i(\mu)} + \frac{1}{2V} \sum_{m\mu k} \sum_{n\nu j l} \Phi_{ij}^{(mn)} x_{k(\mu)} x_{l(\nu)} u_{i,j} u_{k,l}.$$

Generalizzando la trattazione di Born al fine di conservare l'ipotesi che lo stato iniziale non sia quello naturale, indichiamo con $F_i^0(\mu)$ le forze inizialmente applicate sui soli ioni di superficie e con $F_i^1(\mu)$ quelle ad essi aggiunte provocanti la deformazione; supponiamo invece nulle le forze di volume (ciò che implica $F_i^0(\mu) = F_i^1(\mu) = \Phi_i(\mu) = 0$ per tutti gli ioni (μ) all'interno del corpo). Lo scopo di Born è quello di eliminare dalla (III.3.5) gli spostamenti $u_{i(\mu)}$ attraverso la condizione d'equilibrio nello stato deformato

$$(III.3.6) \quad F_i^0(\mu) + F_i^1(\mu) = \Phi_i(\mu) + \sum_{n\nu j} \Phi_{ij}^{(mn)} u_{j(\nu)} + \sum_{n\nu j k} \Phi_{ij}^{(mn)} x_{k(\nu)} u_{j,k},$$

ove si ha $F_i^0(\mu) = \Phi_i(\mu)$ per l'equilibrio iniziale. Rifacendoci, per maggior generalità, alle esaurienti e più recenti trattazioni di Leibfried e Ludwig²⁸³ e ponendo $V = NV_z$, ove N è il numero di celle del cristallo e V_z è il volume della cella elementare, dalla (III.3.5) si può anzitutto sopprimere il termine “di superficie”

$$\frac{1}{V} \sum_{\mu j} u_{j(\mu)} \sum_m \Phi_i^{(m)}$$

perché proporzionale a $1/N^{1/3}$ e quindi tendente a zero per N grande. Ponendo poi

$$(III.3.7) \quad \sigma_{ij}^0 = \frac{1}{V} \sum_{m\mu} \Phi_i^{(m)} x_{j(\mu)} \quad \text{simmetrico in } i \Leftrightarrow j$$

$$(III.3.8) \quad \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ i \ j \end{matrix} \right\} = - \frac{1}{V} \sum_m \sum_n \Phi_{ij}^{(mn)}$$

$$(III.3.9) \quad \left\{ \begin{matrix} \mu \\ i \ jk \end{matrix} \right\} = - \frac{1}{V} \sum_m \sum_{n\nu} \Phi_{ij}^{(mn)} x_{k(\nu)} \quad \text{simmetrico in } j \Leftrightarrow k$$

Zustandsänderungen» quando li si consideri come “particelle orientate” (orientierte Teilchen) la cui posizione spaziale è definita anche da parametri angolari. P. P. Ewald (“Der mechanische Aufbau des festen Körpers in atomistischer Betrachtung”, *Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik*, 1, II, Braunschweig, 1929) afferma che «für die äußere Form des Kristalls ist nur die Änderung $\delta\mathbf{r}^{(m)}$ [variazione del vettore di cella] der Zelle wirksam [non quindi la variazione $\delta\mathbf{r}^{(\mu)}$ del vettore di base], und zwar ergeben sich die Deformationsgrößen der Kontinuumstheorie für den ganzen Kristall genau so groß, als wenn man eine Zelle als Begrenzung eines Stückes Kontinuums betrachtet und dessen Deformation bestimmt. Infolgedessen lassen sich statt der Achsenänderungen $\delta\mathbf{r}^{(m)}$ selbst die aus der Kontinuumstheorie geläufigen Deformation u_{xx} , u_{xy} [rispettivamente ϵ_{xx} , γ_{xy}] einführen» (p. 930). In sostanza, la forma esterna del cristallo è definita dalle variazioni dei soli vettori di cella poiché quelle dei vettori di base non sono macroscopicamente attestabili (nachweisbar).

283 Leibfried G., “Gittertheorie der mechanischen und termischen Eigenschaften der Kristalle”, *Handbuch der Physik*, 7, I, Kristallphysik I, 104-324, Berlin, 1955; Leibfried G., Ludwig W., “Gleichgewichtsbedingungen in der Gittertheorie”, *Zeitschrift für Physik*, 160, 80-92, 1960. Per un quadro generale sulla teoria dei reticoli si veda il testo di Ludwig W., “Recent developments in lattice theory”, *Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften*, 43, Berlin, 1967, in particolare pp. 3-26.

$$(III.3.10) \quad \{ikjl\} = \frac{1}{V} \sum_{\mu\alpha} \sum_{\nu\beta} \Phi_{ij}^{(\mu\nu)} x_k^{(\mu)} x_l^{(\nu)} \quad \text{simmetrico in } (ik) \Leftrightarrow (jl), i \Leftrightarrow j, k \Leftrightarrow l$$

la (III.3.5) può scriversi, facendo inoltre $\varphi = \frac{1}{V} (\Phi - \Phi_0)$,

$$(III.3.11) \quad \varphi = \sigma_{ij}^0 u_{i,j} + \frac{1}{2} \{ikjl\} u_{i,k} u_{j,l} - \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ i j \end{matrix} \right\} u_{i(\mu)} u_{j(\nu)} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ i \end{matrix} \right\} jk u_{i(\mu)} u_{j,k}$$

e la (III.3.6) diviene

$$(III.3.12) \quad \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ i j \end{matrix} \right\} u_{j(\nu)} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ i \end{matrix} \right\} jk u_{j,k} = 0.$$

Da quest'ultima può finalmente trarsi l'espressione degli spostamenti

$$(III.3.13) \quad u_{j(\nu)} = -R_{ik}^{(\mu\nu)} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ k \end{matrix} \right\} j l u_{j,l}$$

ove $R_{ik}^{(\mu\nu)}$ è una matrice simmetrica da calcolarsi caso per caso; introducendo tale espressione nella (III.3.11) e tenendo conto della (III.3.12) si trova pertanto

$$(III.3.14) \quad \varphi = \sigma_{ij}^0 u_{i,j} + \frac{1}{2} c_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l}$$

nella quale i coefficienti

$$(III.3.15) \quad c_{ijkl} = \{ijkl\} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ m \end{matrix} \right\} ij R_{mn}^{(\mu\nu)} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ n \end{matrix} \right\} kl$$

non soddisfano le relazioni di Cauchy poiché hanno le stesse simmetrie di $\{ijkl\}$, valendo soltanto le due serie di uguaglianze

$$(III.3.16) \quad c_{ijkl} = c_{klij}$$

$$(III.3.17) \quad c_{ijkl} - \sigma_{jl}^0 \delta_{ik} = c_{jikl} - \sigma_{il}^0 \delta_{jk}.$$

Questi risultati mostrano che le relazioni di Cauchy sono valide solo quando il reticolo è semplice o sussistono le condizioni per le quali ogni ione è un centro di simmetria, come per il salgemma (NaCl), nel quale gli ioni sodio Na^+ e gli ioni cloro Cl^- formano due reticoli a facce centrate il cui insieme definisce un reticolo cubico a particelle alternate; in tal caso, infatti, si annullano gli spostamenti relativi dei singoli reticoli nell'espressione della *homogene Verzerrung*. Inoltre, come già emerso più volte nel corso della discussione, le interazioni ioniche devono provenire da un potenziale a due corpi affinché i coefficienti c_{ijkl} del termine quadratico del suo sviluppo siano simmetrici nei quattro indici²⁸⁴. Non solo: la

²⁸⁴ Secondo la moderna classificazione dei solidi in base alla natura delle forze di coesione si distinguono quattro tipi, e cioè: 1) cristalli ionici, 2) cristalli di van der Waals, 3) cristalli covalenti, 4) metalli. La caratteristica distintiva fra di essi consiste nel fatto che gli atomi (o ioni) dei primi due tipi sono unità *saturate*, nel senso che presentano la configurazione elettronica propria dei gas rari; al contrario, atomi che formano facilmente legami covalenti sono tipiche unità *non saturate*. Dal punto di vista della meccanica quantistica, ciò significa che le funzioni d'onda elettroniche delle unità non saturate sono soggette a drastiche alterazioni quando esse vengono ravvicinate o sovrapposte. Inquadrandosi nell'ambito dell'approssimazione adiabatica, la teoria di

(III.3.17) afferma che, quand'anche valgano le precedenti due condizioni, la validità delle relazioni di Cauchy dipende dall'annullarsi delle forze esterne (da cui risulta $\sigma_{ji}^0 = 0$). Quest'ultima richiesta ha per lungo tempo diviso gli studiosi e non è chiarita neanche nella recente trattazione di Ludwig da noi seguita, benché già Poincaré avesse implicitamente mostrato che la sua necessarietà discende dall'approssimazione lineare per il tensore di deformazione ed un'ulteriore dimostrazione fosse stata riportata da Brillouin²⁸⁵ nel 1937.

Per completare il “passaggio formale alla teoria del continuo” occorre confrontare la (III.3.14) con il corrispondente sviluppo della densità d'energia secondo la teoria fenomenologica

$$(III.3.18) \quad \varphi = \varphi_0 + C_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

Born è quindi strettamente applicabile ai primi due tipi, per i quali l'energia può calcolarsi col metodo delle perturbazioni. Una conseguenza importante è che l'interazione può considerarsi operante essenzialmente fra coppie di unità saturate, per cui l'energia totale del reticolo è esprimibile da un potenziale a due corpi, come nel caso ricordato del salgemma e, in generale, dei cristalli ionici e di van der Waals.

Nel caso dei cristalli ionici binari (NaCl, CsCl, ZnS, ZnO), gli ioni hanno cariche uguali ed opposte ed ognuno di essi è circondato da M primi vicini di carica opposta (M numero di coordinazione). L'energia di sovrapposizione fra ioni positivi e negativi può facilmente determinarsi dai dati sperimentali se si trascurano tutte le sovrapposizioni tranne quelle tra i primi vicini. In questa approssimazione, l'energia di reticolo Φ per atomo è solitamente espressa da potenziali empirici del tipo

$$\Phi(r) = -\frac{A}{r} + Be^{-r/\rho}$$

$$\Phi(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B'}{r^n}$$

ove il termine attrattivo $-\frac{A}{r}$ (energia di Madelung) rappresenta l'energia elettrostatica fra gli ioni considerati come cariche puntiformi, mentre il termine repulsivo (energia di sovrapposizione), è espresso rispettivamente da $Be^{-r/\rho}$ e $\frac{B'}{r^n}$, ove A, B, B', ρ , n sono parametri opportuni caratteristici dei tipi di ioni e r indica la distanza tra i primi vicini.

Nell'ambito della teoria dei solidi ionici è implicitamente assunto che gli ioni abbiano una distribuzione sfero-simmetrica della carica elettronica ed interagiscano quindi con forze centrali, ciò che implica la validità della relazione di Cauchy $c_{12} = c_{44}$ per i reticoli cubici bcc e fcc. Nella sua classica opera, F. Seitz (*The Modern Theory of Solids*, New York-London, 1940) ha suddiviso i termini energetici in due distinti gruppi, quello relativo al contributo elettrostatico coulombiano variabile lentamente con r, e quello contenente i diversi contributi sensibilmente decrescenti con la distanza, concludendo che la deviazione dalle relazioni di Cauchy è dovuta alla presenza, fra questi ultimi, di termini non sfero-simmetrici. Benché infatti l'energia coulombiana sia circa dieci volte quella degli altri termini (come si intende, ad esempio, dall'espressione per il termine repulsivo come potenza inversa della distanza quando si prenda il plausibile valore $n = 10$), per quanto riguarda le costanti elastiche, correlate alle derivate seconde dei contributi energetici, la parte predominante è connessa al secondo gruppo di termini nel rapporto inverso (1/10) a quello prima indicato. Uno scarto del 10% a livello di costanti elastiche si traduce in una differenza dell'1% a livello energetico, e poiché le differenze d'energia delle varie forme cristallografiche sono dello stesso ordine di grandezza di questo errore, sembra lecito affermare che tali energie possono essere calcolate con precisione solo includendo opportunamente la parte non radiale (pp. 95-96).

Come ha sottolineato Löwdin (1948 e 1956) a conclusione del suo trattamento quanto-meccanico dei solidi ionici, la teoria semi-empirica di Born utilizzando potenziali del tipo sopra indicato, non contiene contributi aventi la natura di *many-body potentials*, come invece appaiono quando si tenga conto della sovrapposizione degli ioni ed ai quali sarebbe da attribuire un contributo pari a circa il 10% dell'energia di coesione totale.

285 Brillouin L., *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, New York, 1946ⁱⁱ, pp. 234.

ove $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,k} u_{j,k})$.

Ciò porta a per riconoscere le corrispondenze

$$(III.3.19) \quad \sigma_{ij}^0 = C_{ij}$$

$$(III.3.20) \quad c_{ijkl} - \sigma_{jl}^0 \delta_{ik} = C_{ijkl} \quad \text{ovvero} \quad c_{ijkl} = C_{ijkl} + C_{jl} \delta_{ik}.$$

È possibile allora stabilire le relazioni fra le grandezze microscopiche e quelle macroscopiche: nello stato iniziale si ha

$$(III.3.21) \quad \sigma_{ij}^0 = C_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{\mu} \Phi_i(\mu) x_j(\mu) = \frac{1}{V} \sum_{\mu} F_i^0(\mu) x_j(\mu);$$

per le costanti elastiche valgono invece le importanti relazioni

$$(III.3.22) \quad \frac{1}{2} (c_{ijkl} + c_{ilkj}) - \sigma_{jl}^0 \delta_{ik} = \frac{1}{2} (C_{ijkl} + C_{ilkj})$$

dedotte per via dinamica da Huang²⁸⁶ perfezionando il *metodo delle onde lunghe* di Begbie e Born²⁸⁷, dalle quali, con opportune operazioni sugli indici, si trae

$$(III.3.23) \quad C_{ijkl} = \frac{1}{2} (c_{ijkl} + c_{ilkj}) + \frac{1}{2} (c_{jikl} + c_{jlki}) - \frac{1}{2} (c_{ikjl} + c_{ijlk}) - \sigma_{jl}^0 \delta_{ik} - \sigma_{il}^0 \delta_{jk} - \sigma_{kl}^0 \delta_{ij}.$$

Nell'approccio dinamico, il cui vantaggio è quello di evitare gli effetti di superficie attraverso la considerazione di un reticolo illimitato, si tratta di confrontare le equazioni del moto per onde piane del continuo (supposto libero da stress iniziale)

$$(III.3.24) \quad \rho v^2 u_i = C_{ijkl} q_j q_l u_k$$

con quelle al limite d'onda lunga per il reticolo illimitato (e quindi soggetto ad uno stato indefinito di tensione iniziale)

$$(III.3.25) \quad \rho v^2 u_i = ([ikjl] + (ijkl)) q_j q_l u_k$$

ove ρ è la densità, v la velocità di propagazione, \mathbf{q} il vettore d'onda indicante la direzione di propagazione e \mathbf{u} quello indicante la direzione d'elongazione, e ove, rapportando le notazioni di Huang alle precedenti, si ha

$$(III.3.26) \quad [ikjl] = \frac{1}{2} (\{ijkl\} + \{ilkj\}) \quad \text{con } [ijkl] = [jikl] = [ijlk] \quad 36 \text{ coefficienti}$$

²⁸⁶ Huang K., "On the atomic theory of elasticity", *Proceedings of the Royal Society of London*, **203 A**, 178-194, 1950.

²⁸⁷ Begbie G. H., Born M., "Thermal scattering of X-rays by crystal. I, Dynamical foundation", *Proceedings of the Royal Society of London*, **188 A**, 179-188, 1947.

$$(III.3.27) \quad (ijkl) = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ m \end{matrix} \right\} R_{(mn)}^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ n \end{matrix} \right\} \quad \text{con } (ijkl) = (jikl) = (ijlk) = (klij) \quad 21 \text{ coefficienti .}$$

Nelle due equazioni d'onda compaiono solo i coefficienti simmetrici in $j \leftrightarrow l$, perciò esse sono identiche se

$$(III.3.28) \quad \frac{1}{2} (C_{ijkl} + C_{ilkj}) = [ikjl] + \frac{1}{2} (ijkl) + \frac{1}{2} (ilkj) .$$

Il trattamento di quest'ultima espressione consente di riconoscere le 15 condizioni

$$(III.3.29) \quad [ijkl] = [klij]$$

che rendono possibile la transizione fra la teoria del continuo e quella del reticolo²⁸⁸; tali relazioni sono automaticamente soddisfatte se si suppone il reticolo privo di stress iniziale, nel qual caso l'espressione delle costanti macroscopiche risulta

$$(III.3.30) \quad C_{ijkl} = [ijkl] + [kjil] - [klij] + (ijkl) ,$$

coincidente con la (III.3.23) quando vi si ponga $\sigma_{ji}^0 = 0$ e si tenga presente la (III.3.15).

III. 4. Spunti moderni al dibattito sulle *relazioni di Cauchy*.

Per necessità espositive, nel precedente paragrafo abbiamo parzialmente abbandonato la narrazione storica rifacendoci a contributi aggiornanti l'iniziale formulazione teorica di Born e pervenendo alle soglie degli anni '70 con la pregevole sistemazione di Ludwig (1967). A tale data, alcuni significativi spunti al dibattito sulle relazioni di Cauchy e sul numero delle costanti elastiche erano però emersi dai diversi fronti dei fisici e dei meccanici in conseguenza di nuove critiche alla tradizionale teoria dell'elasticità; ad essi vogliamo ora volgere la nostra attenzione.

Una scossa del tutto imprevista alle ormai consolidate convinzioni sui limiti di validità delle relazioni di Cauchy doveva inizialmente essere data da Epstein²⁸⁹ nel 1946. Muovendo dalla generalizzazione della teoria di Born attraverso la messa in conto della deformazione finita e la considerazione di uno stato iniziale generico (non naturale), egli è infatti giunto alla

²⁸⁸ Sviluppando il caso del continuo soggetto a stress iniziale, Huang ha mostrato che cinque di esse implicano l'annullarsi delle tensioni iniziali e le altre dieci riflettono l'invarianza rotazionale dell'energia.

²⁸⁹ Epstein P. S., "On the Elastic Properties of Lattices", *Physical review*, **70**, 915-922, 1946.

conclusione che «as far as measurable elasticity coefficients are concerned, no relations of the Cauchy type exist between them, even in the case of central forces»²⁹⁰. L'origine di questa affermazione va ricercata nel presunto riconoscimento che il termine quadratico φ_2 nello sviluppo del potenziale interno, rappresentante la densità d'energia sotto la condizione sussidiaria $\varphi_1 = 0$ valida quando lo stato iniziale è di equilibrio naturale, non godrebbe dell'invarianza alla rotazione dalla quale discendono le simmetrie di Cauchy nell'ipotesi di forze centrali. In sostanza, indicando al solito con

x_i le coordinate iniziali della molecola μ , (con $i = 1, 2, 3$)
 $x_i + u_i$ le sue nuove coordinate dopo gli spostamenti u_i ;
 $x_i + \Delta x_i$ le coordinate iniziali della molecola ν ,
 $x_i + \Delta x_i + u_i + \Delta u_i$ le sue nuove coordinate dopo gli spostamenti $u_i + \Delta u_i$,
 $R + \Delta R = (\Delta x_i + \Delta u_i)^2$ il quadrato della loro distanza nello stato deformato,
 ove

$$\Delta R = 2 \Delta x_i \Delta u_i + (\Delta u_i)^2 = \Delta R_1 + \Delta R_2 ,$$

ed assumendo, con Epstein, il potenziale a due corpi $\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} F(R)$, si trae lo sviluppo per la densità d'energia

$$(III.4.1) \quad \varphi = \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta R + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \right)_0 \Delta R^2$$

in cui si è supposto nullo il termine φ_0 e le somme si intendono nel senso definito da Poincaré (cfr. paragrafo III.1). Poiché si ha

$$(III.4.2) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \Delta x_i} \right)_0 = 2 \Delta x_i \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0$$

$$(III.4.3) \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \Delta x_i \partial \Delta x_j} \right)_0 = 2 \delta_{ij} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 + 4 \Delta x_i \Delta x_j \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \right)_0$$

la (III.4.1) diviene

$$(III.4.4) \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial \Delta x_i} \right)_0 \Delta u_i + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \Delta x_i \partial \Delta x_j} \right)_0 \Delta u_i \Delta u_j .$$

Attraverso un'integrazione approssimata delle equazioni di congruenza

$$(III.4.5) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,k} u_{j,k}) ,$$

Epstein perviene all'espressione degli spostamenti relativi

$$(III.4.6) \quad \Delta u_i = f_{li} \Delta x_l - \frac{1}{2} f_{lk} f_{ik} \Delta x_l ,$$

ove $f_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$, con $\omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i})$.

290 Ibidem, p. 915.

Sostituendo la (III.4.6) nella (III.4.4) e conservando al più i termini quadratici, egli riconosce che da φ_1 , oltre alla parte V_1 lineare in ε_{ij} , proviene anche una parte V_1'' del termine del secondo ordine in ε_{ij} . Sopprimendo poi i coefficienti nelle rotazioni ω_{ij} ed elaborando opportunamente l'espressione, trova infine che i coefficienti di $V_1'' + V_2$ ($= \varphi_2$) soddisfano le relazioni di Cauchy, come già riconosciuto da Poincaré e Thomson attraverso un'analogha procedura. Specializzando la trattazione al caso di forze esterne nulle (da cui $\varphi_1 = 0$), Epstein conclude allora che, delle due forme quadratiche in ε_{ij} , solamente $V_1'' + V_2$ soddisfa le relazioni di Cauchy, mentre V_2 , che rappresenta l'energia e contiene quindi i coefficienti elastici, le evade.

All'indomani della pubblicazione del lavoro di Epstein, una breve nota di Zener²⁹¹ sulla stessa rivista forniva una prima smentita di queste conclusioni. Poco più tardi, l'argomento doveva essere ripreso nel suo complesso da Stakgold²⁹², la cui chiara discussione ha fatto emergere le erronee considerazioni di Epstein rivelando, nel contempo, i limiti della stessa trattazione di Born per forze iniziali non nulle quando non si metta in conto l'espressione al secondo ordine per Δu_i .

Stakgold mostra infatti che, nel caso di forze esterne iniziali nulle, i coefficienti di elasticità compaiono tanto in $V_1'' + V_2$, quanto in V_2 perché è $V_1'' = 0$, come Poincaré ha effettivamente riconosciuto in conseguenza delle condizioni (III. 1.10). Ponendo le (III.4.6) nella (III.4.4) egli trova

$$(III.4.7) \quad \varphi = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial \Delta x_i} \right)_0 f_{li} \Delta x_l - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial F}{\partial \Delta x_i} \right)_0 f_{lk} f_{ik} \Delta x_l + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \Delta x_i \partial \Delta x_j} \right)_0 f_{li} f_{mj} \Delta x_l \Delta x_m$$

la quale, per le (III.4.2-3) diviene

$$(III.4.8) \quad \varphi = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 2 \Delta x_i \Delta x_l f_{li} - \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 2 \Delta x_i \Delta x_l f_{lk} f_{ik} + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} 2 \delta_{ij} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_l \Delta x_m f_{li} f_{mj} + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \Delta x_i \partial \Delta x_j} \right)_0 4 \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_l \Delta x_m f_{li} f_{mj}$$

ovvero, annullando i coefficienti dei termini nelle rotazioni,

$$(III.4.9) \quad \varphi = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 2 \Delta x_i \Delta x_l \varepsilon_{li} + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \Delta x_i \partial \Delta x_j} \right)_0 4 \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_l \Delta x_m \varepsilon_{li} \varepsilon_{mj}$$

ove i coefficienti del termine quadratico hanno evidentemente tutte le simmetrie fra gli indici.

291 Zener C., "A Defense of the Cauchy Relations", *Physical review*, **71**, 323, 1947.

292 Stakgold I., "The Cauchy Relations in a Molecular Theory of Elasticity", *Quarterly of applied mathematics*, **8**, 169-186, 1950.

Stakgold riconosce inoltre che, limitandosi all'espressione lineare

$$\Delta u_i = f_{li} \Delta x_l$$

utilizzata da Born per i reticoli semplici, la sua sostituzione nella (III.4.4) fornisce

$$(III.4.10) \quad \varphi = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 2\Delta x_\mu \Delta x_\nu f_{li} + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} 2\delta_{ij} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_\mu \Delta x_\nu f_{li} f_{mj} \\ + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \Delta x_\mu \partial \Delta x_\nu} \right)_0 4\Delta x_\mu \Delta x_\nu \Delta x_\lambda \Delta x_\sigma f_{li} f_{mj} ,$$

il cui confronto con la (III.4.8) mostra, una volta soppressi come in precedenza i coefficienti dei termini nelle rotazioni, la permanenza del contributo quadratico in ϵ_{li}

$$(III.4.11) \quad \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} 2\delta_{ij} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_0 \Delta x_\mu \Delta x_\nu \epsilon_{li} \epsilon_{mj}$$

il quale, da un punto di vista tensoriale, non soddisfa le relazioni di Cauchy; esse, cioè, verrebbero a dipendere dall'annullarsi delle forze esterne.

Per questi importanti chiarimenti, il poco noto lavoro di Stakgold ha meritato il più tardo plauso da parte di Hill²⁹³ il quale, sfiorando l'argomento delle relazioni di Cauchy in un contesto più generale incentrato sulla stabilità dei reticoli cristallini, ha confermato i precedenti risultati mostrando, inoltre, che le simmetrie di Cauchy valgono soltanto rispetto alla misura di deformazione di Green.

III. 5. La nuova controversia sulle costanti elastiche: 21 o 45 ?

All'argomento critico di Epstein sul significato delle relazioni di Cauchy, destinato a rimanere senza alcun seguito dopo l'appunto di Zener e le precisazioni di Stakgold, doveva seguirne di lì a poco un altro, questa volta assai più coinvolgente e duraturo, proveniente dal fronte dei fisici dello stato solido.

Per la verità, le nuove contestazioni mosse all'intero impianto della teoria dell'elasticità, tanto nella sua formulazione atomica quanto in quella fenomenologica, non meriterebbero troppa attenzione se non si inscrivessero in un quadro di più ampia portata, il cui primitivo orizzonte si è configurato, dopo quasi un decennio di incerti sviluppi, nella

²⁹³ Hill R., "On the elasticity and stability of perfect crystals at finite strain", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **77**, 225-240, 1975.

Meccanica dei mezzi generalizzati fiorita con matura consapevolezza soltanto all'inizio degli anni '60.

L'esordio della vicenda risale infatti al 1951, quando il nono Consiglio di Fisica dell'Institut Solvay, tenutosi Bruxelles nel mese di settembre, ha accolto le nuove tesi di Laval²⁹⁴ sull'elasticità cristallina, a tal punto sconvolgenti da provocare il moto di stupore del presidente del Comitato Scientifico: «Mr. Laval's paper» ammetteva Sir Lawrence Bragg, uno dei padri fondatori della moderna cristallografia, «makes considerable demand on our courage ! The theory of crystalline elasticity seemed formidable enough when we believed there were 21 coefficients in the general case. We know now that we must envisage 45»²⁹⁵.

Le ragioni addotte da Laval per la presunta riscrittura della teoria dell'elasticità vanno ricercate nelle criticate ipotesi ammesse da Huang per stabilire il raffronto fra le equazioni d'onda del continuo (III.3.24) e del reticolo (III.3.25) e, in particolare, nelle simmetrie valide per i coefficienti (ijkl) espressi dalla (III.3.27), i quali, tenendo conto della (III.3.9) risultano

$$(III.5.1) \quad (ijkl) = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ m \end{matrix} \right\} ij \left\{ \begin{matrix} \nu \\ n \end{matrix} \right\} kl = - \frac{1}{V} \sum_{\mu\alpha} \sum_{\nu\beta} \sum_{\rho\gamma} \sum_{\sigma\delta} \Phi_{ri}(\mu\nu) x_j(\nu) R_{rs}(\mu\eta) \Phi_{sk}(\rho\sigma) x_l(\xi) .$$

Ora, la (III.3.9) deriva la simmetria nello scambio $i \Leftrightarrow j$ dalla condizione d'invarianza dell'energia sotto rotazioni rigide

$$(III.5.2) \quad \delta_{ij} \Phi_i(\mu) - \delta_{ri} \Phi_j(\mu) = \sum_{\mu\alpha} \Phi_{ri}(\mu\nu) x_j(\nu) - \sum_{\mu\alpha} \Phi_{rj}(\mu\nu) x_i(\nu) ,$$

contestata da Laval sulla base di un argomento espresso a più riprese ed ancora ribadito nel 1964²⁹⁶, quando ormai più verifiche della sua inconsistenza erano state offerte²⁹⁷.

²⁹⁴ Laval J., "Sur l'élasticité du milieu cristallin", *L'état solide: rapports et discussions du neuvième Conseil de Physique tenu à l'Université Libre de Bruxelles du 25 au 29 septembre 1951*, 273-312, Bruxelles, 1952. I risultati di tale studio erano già apparsi in *Comptes rendus*, **232**, I sem., 1947-1948, 1951.

²⁹⁵ Bragg L., "Discussion du rapport de M. Laval", *L'état solide ...*, p. 313.

²⁹⁶ Laval J., "L'élasticité du milieu cristallin. I. L'énergie potentielle d'un cristal et les constantes de rappel atomiques", *Journal de physique et le radium*, **18**, 247-259, 1957; "II. Dynamique des ondes élastiques", *idem*, 289-296; "III. Les déformations linéaires (élasticité statique)", *idem*, 370-379; "Théories atomiques de l'élasticité du milieu cristallin", *Annales de l'Institut H. Poincaré*, **1 A**, 329-384, 1964.

²⁹⁷ Hedin L. T., "A microscopic derivation of the Born-Huang relations between the atomic force constants", *Arkiv för Fysik*, **18**, 369-378, 1961; Lax M., "The relation between microscopic and macroscopic theories of elasticity", *Proceedings of the International Conference on Lattice Dynamics held at Copenhagen, Denmark, August 5-9, 1963*, 583-596, Oxford, 1965. Ludwig ("Recent developments ...", 1967) liquida le obiezioni sollevate da Laval nel 1964 osservando che esse «are based on a severe misunderstanding of the (many body-) potential energy. He denies that in a lattice without spins (or other hidden variables) the potential energy is a function of all mutual distances of the ions. Therefore he does not believe the condition of rotational invariance» (p. 23).

In sostanza, Laval afferma che, quando un cristallo compie una rotazione rigida, i singoli atomi, pur non avendo variato la loro distanza relativa, hanno però assunto delle nuove posizioni e poiché presuppone che l'energia potenziale Φ del reticolo non sia interamente determinata dalle distanze tra gli atomi, egli conclude che la funzione esprime Φ cambia in generale di forma: in questo caso, infatti, l'invarianza dell'energia rispetto alla rotazione non implicherebbe la costanza della funzione che la esprime. Questo ragionamento si traduce nella conseguenza che i coefficienti $(ijkl)$ perdono la simmetria nello scambio $i \leftrightarrow j$, per cui le equazioni d'onda del continuo e del reticolo risultano inconfondibili; mentre nelle prime compaiono infatti gli usuali 21 coefficienti C_{ijkl} , nelle seconde sono presenti, in generale, 45 coefficienti $(ijkl)$ simmetrici soltanto nello scambio delle coppie (ij) e (kl) . Non solo: in questo nuovo quadro, una distinzione s'impone anche fra l'elasticità statica, effettivamente caratterizzata dai 45 coefficienti $(ijkl)$ (tre nel caso isotropo), e quella dinamica, nella quale essi si riducono a 36, entrando nelle equazioni d'onda sotto la combinazione $\frac{1}{2}((ijkl) + (ilkj))$ per la simmetria nello scambio $j \leftrightarrow l$ imposta dal prodotto $q_j q_l$ fra le componenti dei vettori d'onda. Solo in casi particolari le due teorie ammetterebbero un confronto; se, ad esempio, ogni atomo è un centro di simmetria, i coefficienti del tipo $(ijkl)$ si annullano perché connessi agli spostamenti relativi dei reticoli, nel qual caso, per forze centrali, i coefficienti $[ijkl]$ hanno anche le simmetrie di Cauchy, riducendosi da 21 a 15; se inoltre, pur in assenza di simmetrie del reticolo, le forze sono centrali, sussistono le relazioni $(ijkl) = (jikl) = (ijlk)$ che forniscono 21 coefficienti distinti.

Quanto sia mal fondata la trattazione atomistica di Laval è rivelato dal suo tentativo di giustificare, sulle conclusioni di quella, una congruente teoria fenomenologica. Volendo evidenziare il ruolo delle rotazioni, egli scrive l'espressione dell'energia nella forma

$$(III.5.3) \quad \Phi = \frac{1}{2} N_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} = \frac{1}{2} N_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} N_{ijkl} (\varepsilon_{ij} \omega_{kl} + \varepsilon_{kl} \omega_{ij} + \omega_{ij} \omega_{kl}),$$

ove abbiamo ripreso la notazione dell'autore per i coefficienti elastici $N_{ijkl} = [ijkl] + (ijkl)$ e nella quale è $u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$. Nelle idee di Laval, le rotazioni ω_{ij} rappresentano «l'écart entre la déformation véritable et la déformation pure (ou irrotationnelle)» alle quali si deve la presenza del secondo addendo nella (III.5.3), rispecchiante, a livello atomico, secondo un'accattivante quanto improbabile corrispondenza, «l'écart entre les forces de rappel véritables et les forces centrales»; nel caso di deformazione pura, infatti, Laval ottiene

$$(III.5.4) \quad \Phi = \frac{1}{2} N_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

e stabilisce la relazione

$$(III.5.5) \quad C_{ijkl} = \frac{1}{4} (N_{ijkl} + N_{jikl} + N_{ijlk} + N_{jilk})$$

coi coefficienti della teoria classica.

Non è ancora tutto; derivando le componenti di tensione dall'energia

$$(III.5.6) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_{i,j}} = N_{ijkl} u_{k,l}$$

e conservando i 45 coefficienti distinti, egli si ostina a ritenere valida l'uguaglianza $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ fra le componenti tangenziali di tensione, pena il venir meno dell'equilibrio. Sarà Le Corre²⁹⁸,

298 Le Corre Y., "Détermination des sept constantes élastiques dynamiques du phosphate monoammonique", *Comptes rendus*, **236**, I sem., 1903-1904, 1953. Sono qui ricordati alcuni risultati sperimentali, esposti da Le Corre per la prima volta nella sua tesi di laurea, sulla velocità di propagazione delle onde acustiche nel fosfato monoammonico ($\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$); da essi emergerebbe che la velocità delle oscillazioni trasversali ($u_1 = u_2 = 0, u_3 = 1$) propagantisi lungo un asse binario è diversa da quella dell'oscillazione trasversale degenerata propagantesi secondo l'asse quaternario, ciò che implica la disuguaglianza $N_{1213} \neq N_{2131}$ tra i coefficienti previsti eguali nella teoria classica. "Contantes élastiques et piézoélectriques cristallines", *Bulletin de la Société française de Minéralogie et de Cristallographie*, **67**, 464-479, 1953. Questo lavoro contiene il primo tentativo di spiegare i risultati della teoria atomica di Laval nell'ambito di una teoria macroscopica dell'elasticità per la quale sia asimmetrico il tensore delle tensioni. In questo caso, nelle equazioni di legame per un «milieu homogène et isotrope il faut introduire un troisième coefficient η en plus des coefficients de Lamé λ et μ ». Si avrebbe cioè

$$\sigma_{11} = (\lambda + \mu) \sigma_{11} + \lambda \sigma_{22} + \lambda \sigma_{33} \quad \sigma_{23} = (\mu + \eta) \sigma_{23} + (\mu - \eta) \sigma_{32} \quad \sigma_{32} = (\mu + \eta) \sigma_{32} + (\mu - \eta) \sigma_{23}$$

«Le coefficient η » osserva Le Corre, «ne joue aucun rôle en élasticité statique si le tenseur des efforts est symétrique mais intervient en élasticité dynamique». Secondo tale nuovo schema, nei corpi isotropi la relazione di Cauchy diviene $\lambda = \mu - \eta$. "Étude de l'élasticité et de la piézoélectricité cristallines. I, Désaccord entre l'expérience et la théorie de Voigt", *Bull. Soc. franç. Minér. Crist.*, **77**, 1363-1392, 1954. "II, Théorie tensorielle de l'élasticité et de la piézoélectricité", *Idem*, 1393-1409. "III, Théorie atomique de l'élasticité et de la piézoélectricité", *Idem*, **78**, 33-53, 1955; "IV, Théorie atomique de la piézoélectricité de la blende", *Idem*, 54-83. Le singolari conseguenze della teoria di Laval sono sviluppate da Le Corre anche nell'articolo "La dissymetrie des tenseurs des efforts et ses conséquences", *Journal de physique et le radium*, **17**, 934-939, 1956. Prendendo ad esempio un cilindro avente una base fissa sollecitato da uno sforzo tangente uniforme sulla superficie laterale, Le Corre afferma che la reazione equilibrante della base fissa «peut se faire d'une infinité de manières»; nei due casi estremi la superficie elementare della base è soggetta ad una coppia oppure ad uno sforzo tangente. «Il semble évident que les forces atomiques seront distribuées dans la réalité selon un mode intermédiaire» (p. 935). Purtuttavia, osserva l'autore, «la théorie classique nie la possibilité d'une densité de couple superficielle. Il est exact que si le champ de force interatomique est central il en est ainsi: la structure atomique se déforme de façon à annuler tout couple en surface ou en volume. Mais si nous voulons édifier une théorie de l'élasticité sans hypothèse aucune sur le champ de forces, nous n'avons pas le droit d'écarter *a priori* la possibilité d'une densité de couple». Se dal lato statico la presenza di coppie (di volume o superficiali sembra fare poca differenza per Le Corre) giustifica l'asimmetria del tensore delle tensioni, dal lato cinematico la deformazione è descritta dal tensore $u_{i,j} \neq u_{j,i}$; l'energia di deformazione dipende dunque anche dalla parte antisimmetrica della deformazione e, in particolare, «n'est pas nulle alors qu'elle ne correspond à aucune déformation apparent du cristal», purché esso sia ruotato rispetto al riferimento iniziale; la spiegazione è la seguente: «dès que les forces ne sont pas centrales, la forme extérieure du cristal déformé d'une façon homogène ne suffit pas pour définir l'énergie de déformation élastique; il faut tenir compte des déformations de densités électroniques et des déplacements relatifs de sous-réseaux atomiques». Gli esiti delle ricerche di Le Corre sono raccolti nell'articolo "Les densités de couple et les pseudo-rotations dans la théorie de l'élasticité de Laval", *Journal de physique et le radium*, **19**, 541-547, 1958. Con questo articolo l'allievo va oltre il maestro nel tentativo di formulare la teoria a 45 costanti sulle idee di pseudo-rotazione e di densità di «couple en volume». Per pseudo-rotazione Le Corre intende la parte antisimmetrica del tensore $u_{i,j}$, cioè l'usuale rotazione ω_{ij} ; Le Corre sembra però distinguere fra i due concetti in quanto la pseudo-rotazione, «si conserve la forme apparente du cristal elle en modifie la structure interne», nel senso che «les densités électroniques et les positions relatives des ions s'en trouvent, en général, perturbées». In base a questa interpretazione verrebbero meno le relazioni di Born-Huang, le quali «sont obtenues en écrivant que l'énergie est invariante si on soumet le cristal à une rotation d'ensemble infiniment petite». Ciò spiegherebbe anche la differenza fondamentale tra la teoria di Voigt e quella di Laval, consistente nel fatto che «la première admet une invariance de l'énergie de déformation par rapport à toute pseudo-rotation. C'est faire une hypothèse gratuite sur la nature du champ de forces interatomiques. Cette hypothèse ne peut être vérifiée que pour des champs de forces particuliers comme ceux de forces centrales».

allievo di Laval al Collège de France, a percepire quest'ultima contraddizione suggerendo l'introduzione di coppie, di volume o di superficie, per giustificare la teoria del maestro e dar conto di sue presunte verifiche sperimentali tratte dalla propagazione delle onde acustiche nel fosfato monoammonico.

Riportando in nota le incerte deduzioni di Le Corre, vogliamo invece evidenziare che, nella stessa linea dei due autori francesi, ricerche dagli esiti analoghi erano parallelamente sviluppate da alcuni studiosi indiani della scuola di C. V. Raman a Bangalore. Indipendentemente dai colleghi di Parigi, Viswanathan²⁹⁹ è giunto all'identica conclusione per la quale le equazioni d'onda del reticolo e del continuo «are not in general mathematically equivalent and are therefore not identifiable». L'origine di questa discrepanza è ancora una volta riconosciuta nel concetto di «heterogeneous deformation» $u_{i,j} \neq u_{j,i}$ associato al rifiuto della condizione d'invarianza rotazionale dell'energia, ciò che sfocia nell'asimmetria del tensore di tensione e , conseguentemente, in equazioni a 45 costanti distinte nel caso statico.

Inizialmente, Viswanathan³⁰⁰ ha addebitato la disuguaglianza $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$ all'esistenza di coppie di volume derivate dall'energia secondo la relazione $M_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_{23}}$ e analoghe, per poi abbandonare tale idea criticando Le Corre ed ammettendo, con Raman, che «the analytical specification of the stresses in terms of the tensor components should itself suffice to describe the state of the solid completely»³⁰¹, indipendentemente, cioè, dalla presenza di coppie di volume.

Le pesanti incertezze sulle correnti vedute dei fisici generate da questi lavori e rafforzate probabilmente dalla notorietà dei proponenti e da presunte conferme sperimentali³⁰², si riflettono visibilmente nelle sintesi di Hearmon³⁰³ ed Huntington³⁰⁴ sullo «stato dell'arte» nella ricerca sullo stato solido. Ad incentivare questo clima doveva contribuire l'adesione alle nuove tesi da parte di altri nomi eminenti della fisica dei cristalli.

299 Viswanathan K. S., "The theory of elasticity and of wave-propagation in crystals from the atomistic standpoint", *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, **39 A**, 196-213, 1954.

300 Viswanathan K. S., "The theory of elasticity of crystals", *Proc. of the Indian Academy of Sciences*, **41 A**, 98-116, 1955.

301 Raman C. V., Viswanathan K. S., "The elastic behaviour of isotropic solids", *Proc. Ind. Acad. Sc.*, **42 A**, 1-9, 1955; "On the theory of elasticity of crystals", *Idem*, 51-70, p. 70.

302 Raman C. V., Krishnamurti D., "Evaluation of the four elastic constants of some cubic crystals", *Proc. Ind. Acad. Sc.*, **42 A**, 111-130, 1955.

303 Hearmon R. F. S., "The elastic constants of anisotropic materials-II", *Advances in Physics. A quarterly supplement of the Philosophical Magazine*, **5**, 323-382, 1956.

304 Huntington H. B., "The elastic constants of crystals", *Solid State Physics. Advances in research and applications*, **7**, 214-351, 1958.

Nel 1957 Wooster³⁰⁵ ha fatto proprie le idee dei colleghi francesi ed indiani concependo un modello in grado di dar conto delle coppie di volume necessarie a rimuovere la simmetria del tensore di stress, per poi rivedere queste iniziali convinzioni e giungere ad una nuova formulazione a 39 costanti per il caso generale dei cristalli triclini³⁰⁶.

Partendo dalle equazioni d'equilibrio alla rotazione in presenza di momenti dei volume M_h , vale a dire

$$(III.5.7) \quad \sigma_{ij} - \sigma_{ji} + \delta_{ijh} M_h = 0,$$

e ritenendo tali momenti diversi da zero solo se esiste una deformazione dell'elemento di volume, Wooster e Joel pervengono infatti, tenendo conto delle equazioni esprimenti il legame $\sigma_{ij} = c_{ijhk} \epsilon_{hk}$ (con $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$ e $\epsilon_{ij} \neq \epsilon_{ji}$ per $i \neq j$), alle sei relazioni

$$(III.5.8) \quad c_{ijhk} + c_{jikh} = c_{ijkh} + c_{jihk}$$

responsabili della riduzione a 39 dei coefficienti elastici c_{ijhk} . Affrontando poi il delicato problema dell'invarianza dell'energia alla rotazione, essi riscrivono l'espressione

$$\Phi = \frac{1}{2} c_{ijhk} u_{i,j} u_{h,k}$$

305 Wooster W. A., Joel N., "Theories of crystal elasticity", *Nature*, **180**, 430-431, 1957.

306 Wooster W. A., Joel N., "Number of elastic constants required in crystal elasticity", *Nature*, **182**, 1078-1079, 1958; "New measurements of elastic constants of ADP, and their relation to the theories of crystal elasticity", *Acta crystallographica*, **13**, 516-525, 1960; "On six new relations between the elastic constants of crystals", *Acta crystallographica*, **14**, 571-578, 1961. In questo secondo lavoro, l'origine delle coppie di volume è spiegata supponendo il cristallo composto di dipoli elettrici egualmente orientati ed ammettendo che particolari condizioni di tensione producano un campo elettrico interno; se la direzione di questo campo non coincide con quella dell'asse del dipolo elettrico, in ogni cella può essere generata una coppia di volume, proporzionale al volume del cristallo. Se il materiale ha una distribuzione isotropa degli atomi polarizzabili o se la simmetria è sufficientemente elevata, le direzioni del campo elettrico e di ogni dipolo coincidono; tuttavia, se la distribuzione è meno simmetrica, «there is no reason why there should not be a small angle between the internal field and the axis of the dipoles and again body couples would be produced» (p. 572). Qualunque sia il meccanismo responsabile della comparsa delle coppie di volume, gli autori ritengono che, «given a crystal subject to mechanical strains only, a necessary condition for the appearance of body-couples in any element of volume is that a deformation should be present in this element of volume (it is not stated that this condition is sufficient !)» (p. 573). Se quindi è nulla la deformazione in un elemento di volume, è pure nulla la corrispondente coppia di volume. Una precisazione è aggiunta sul concetto di "elemento di volume" e sul suo significato nel passaggio dal macroscopico al microscopico: tale elemento di volume è inteso piccolo in confronto alla lunghezza d'onda delle onde elastiche, di modo che tensioni e deformazioni possono ritenersi costanti al suo interno, ma è pensato grande rispetto alle dimensioni della cella unitaria, «which makes it possible to apply to crystal lattices notions that belong to the continuum. In other words, "element of volume" is to be understood as a portion of a lattice throughout which the lattice strain is constant» (p. 574); è esattamente in questi termini che i primi molecolaristi intendevano la deformazione nel «système de points matériels» ed è ancora in tal senso che si sono espressi esplicitamente Poincaré (1889, 1892) e Brillouin (1946).

come già fatto da Laval, evidenziandone le sue tre componenti $\Phi = \Phi(\varepsilon_{ij}) + \Phi(\varepsilon_{ij}, \omega_{ij}) + \Phi(\omega_{ij})$ e notando che quello quadratico nelle rotazioni $\Phi(\omega_{ij}) = \frac{1}{2} (c_{ijhk} + c_{jikh} - c_{ijkh} - c_{jihk}) \omega_{ij} \omega_{hk}$ è nullo per le (III.5.8). «In physical terms», osservano gli autori, «this means that the rotational part of the strain can also contribute to the strain energy if there is a deformation present [vale a dire $\Phi(\varepsilon_{ij}, \omega_{ij}) \neq 0$]; but the rotations do not contribute to the strain energy if they are not accompanied by a deformation»; per poi aggiungere che «whatever model is chosen to explain the strain-induced body-couples, these rotations can contribute to the strain energy only if they are rotations of part of matter relative to the surrounding matter in the same crystal. Such a relative rotation is absent in rigid rotations so that, as should be expected, rigid rotations do not contribute to the rotational part of the strain energy»³⁰⁷. Ecco finalmente emergere, sebbene in un contesto sostanzialmente erroneo ed incompleto, l'idea di rotazione *relativa* di elementi contigui di materia, nella quale si riflette il carattere “orientato” delle particelle materiali, per la prima volta descritto da Duhem³⁰⁸ associando ad ogni punto una terna di *direttori* delineante una soggiacente micro-struttura. Certo, le conseguenze di tale arricchimento descrittivo sono tutt'altro che riconosciute dagli autori, le cui conclusioni si inscrivono entro quelle erronee di Laval, limitandosi a ridurre l'energia potenziale alla forma $\Phi = \Phi(\varepsilon_{ij}) + \Phi(\varepsilon_{ij}, \omega_{ij})$ per la soppressione del termine $\Phi(\omega_{ij})$. Tuttavia, i tempi erano ormai maturi per la definitiva riscoperta della dimenticata *Théorie des corps déformables* (1909) dei fratelli Cosserat, nella quale l'idea Duhem è posta a fondamento della meccanica generalizzata dei corpi micropolari. Fin dai primi anni '60 si manifesta infatti un'intensa rinascita d'interesse per questo abbandonato settore della meccanica dei solidi, sfociante, dopo la parziale ma significativa nota di Tiffen e Stevenson³⁰⁹, nelle rigorose sistemazioni di Truesdell e Toupin (1960), Toupin (1962, 1964), Grioli (1960), Mindlin e Tiersten (1962), Green e Rivlin (1964) ed altri, formulate da un punto di vista strettamente continuista, e nei paralleli tentativi McClintock (1958) e di Rajagopal e Krishnan (1960, 1961), moventi dall'incompleta impostazione atomica sopra descritta.

307 Wooster W. A., Joel N., “On six new relations ...”, p. 574.

308 Duhem P., “Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique”, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **10**, 183-230, 1893.

309 Tiffen R., Stevenson A. C., “Elastic isotropy with body force and couple”, *Quarterly Journal of mechanics and applied mathematics*, **9**, 306-312, 1956. Questo lavoro sembra costituire il primo, inconsapevole, riconoscimento degli aspetti essenziali della teoria dei Cosserat, dopo la loro menzione fatta di sfuggita da Truesdell nei suoi “Mechanical Foundations” del 1952. Muovendo proprio dalle critiche all'inconsistente trattazione di Raman e Viswanathan, gli autori pervengono infatti alle equazioni d'equilibrio per i corpi micropolari tenendo conto delle microcoppie μ_{ij} ed esprimono l'energia $\Phi(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij})$ in funzione delle *curvature* $\kappa_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_{ij}}$, evidenziando che le rotazioni entrano in gioco nelle loro derivate prime ($\kappa_{ij} = \omega_{j,i}$) e solo in presenza di coppie di volume o di superficie, assenti invece nell'analisi degli studiosi indiani.

Non è nostro intento proseguire oltre nella discussione di questi lavori. Vogliamo invece segnalare come, dopo le iniziali intuizioni dei fisici e la loro concreta formalizzazione da parte dei meccanici del continuo, le due comunità di studiosi abbiano trovato una nuova alleanza in occasione del già ricordato Symposium IUTAM del 1967, i cui *Proceedings* sono non a caso dedicati ai Cosserat e ad É. Cartan, al quale si deve l'introduzione, nel 1922, del concetto di torsione dello spazio riconosciuto isomorfo a quello di dislocazione nei cristalli.

III. 6. Cenno alle odierne linee di ricerca fra Meccanica del continuo e Fisica dello stato solido.

Gran parte della ricerca moderna sulla Meccanica dei solidi si iscrive infatti nella prospettiva delineata da Kröner nella prefazione dei *Proceedings* IUTAM, ove, fra i nuovi compiti ad essa attribuiti, sono elencati i seguenti:

- «1. the unification of the various approaches developed in recent years with the aim of penetrating into the microscopic world of matter by means of continuum theories;
2. the bridging of the gap between microscopic (or atomic) research on mechanics on one hand, and the phenomenological (or continuum mechanical) approach on the other hand;
3. The physical interpretation and the relation to actual material behaviour of the quantities and laws introduced into the new theories, together with applications; . . . »³¹⁰.

È in questo quadro che si collocano, oltre ai ricordati lavori sulle teorie dei continui micropolari qui ulteriormente sviluppate da Eringen, Schaefer, Hermann ed altri, le trattazioni di Krumhansl³¹¹ e Kunin³¹², ove è introdotto il modello matematico del *quasicontinuo* sulla base dell'interpolazione di funzioni ad argomento discreto con una classe speciale di funzioni analitiche tali da realizzare una corrispondenza biunivoca tra il modello atomico e quello fenomenologico, e quelle di Mindlin³¹³, nelle quali i gradienti d'ordine

³¹⁰ Kröner E., "Mechanics of generalized continua", *Proceedings of the IUTAM Symposium on the generalized Cosserat continuum and the continuum theory of dislocations with applications, Freudenstadt 18-31 agosto, and Stuttgart 1-2 settembre 1967*, Berlin-Heidelberg-New York, 1968, p. V.

³¹¹ Krumhansl J. A., "Generalized continuum field representations for lattice vibrations", *Proceedings of the International Conference on "Lattice Dynamics" held at Copenhagen, Denmark, August 5-9, 1963*, 627-634, Oxford, 1965.

³¹² Kunin I. A., "The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocations", *Mechanics of generalized continua. Proceedings of the IUTAM Symposium on the generalized Cosserat continuum and the continuum theory of dislocations with applications, Freudenstadt and Stuttgart*, 321-329, Berlin, Heidelberg, New York, 1968. Un approccio globale alla teoria dei solidi dotati di microstruttura è contenuto nel testo di Kunin, *Elastic media with microstructure. I, One-dimensional models*, Berlin, Heidelberg, New York, 1982; *II, Three-dimensional methods*, 1983.

³¹³ Mindlin R. D., "Theories of elastic continua and crystal lattice theories", *Mechanics of generalized continua. Proceedings of the IUTAM Symposium on the generalized Cosserat continuum and the continuum*

superiore della deformazione e della rotazione entrano in gioco per approssimare le equazioni del moto dei reticoli semplici e composti oltre l'usuale "long wave limit".

Lo stesso Krumhansl³¹⁴, riferendosi alla forma del potenziale per i continui micropolari

$$\Phi(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}) = \frac{1}{2} A_{ijhk} \kappa_{ij} \kappa_{hk} + B_{ijhk} \varepsilon_{ij} \kappa_{hk} + \frac{1}{2} C_{ijhk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk} ,$$

ha per primo additato la possibilità di intendere le curvature κ_{ij} come torsioni e flessioni microscopiche delle celle di reticolo dei cristalli molecolari. Questa idea, nella quale sono portate alle loro conseguenze le lontane congetture di Poisson sul ruolo delle rotazioni di molecole di dimensione finita, è stata poi formalizzata, fra gli altri, da Eringen e Suhubi³¹⁵, Valanis³¹⁶, Askar³¹⁷ trattando ogni unità cristallina come un elemento di un continuo di Cosserat.

A partire dalla metà degli anni '70, un rinnovato interesse per la teoria molecolare nella sua primitiva e più semplice formulazione è poi emerso presso studiosi tradizionalmente impegnati nella meccanica del continuo. In un lavoro già citato di Hill e nei suoi sviluppi dovuti all'allievo Parry³¹⁸, sono gettate le basi di un nuovo approccio alla meccanica dei materiali fondato sulla costruzione *ad hoc* di funzioni esprimenti l'energia di deformazione anche in campo finito, alle quali è richiesto di riflettere le simmetrie imposte dalla struttura del reticolo cristallino. Pressoché contemporaneamente e nella stessa linea,

theory of dislocations with applications, Freudenstadt and Stuttgart, 312-320, Berlin, Heidelberg, New York, 1968. Un esauriente quadro generale riassuntivo delle procedure in esame è offerto da Mindlin nell'articolo "Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics", *Journal of elasticity*, **2**, 217-282, 1972.

314 Krumhansl J. A., "Generalized continuum field representations for lattice vibrations", *Proceedings of the International Conference on Lattice Dynamics held at Copenhagen, Denmark, August 5-9, 1963*, 627-634, Oxford, 1965.

315 Eringen A. C., Suhubi E. S., Non linear theory of micro-elastic solids-II, *International Journal of Engineering Science*, **2**, 389-404, 1964.

316 Valanis C., Elastic materials with particles with rotary inertia, long-range force, and polar interaction, *Recent advances in engineering science*, **5**, II, 209-234, 1970.

317 Askar A., "Molecular crystals and the polar theories of the continua. Experimental values of materials coefficients for KNO₃", *International Journal of Engineering Science*, **10**, 293-300, 1972.

318 Parry G. P., "On the elasticity of monoatomic crystals", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **80**, 189-211, 1976; "On diatomic crystals", *International Journal of solids and structures*, **14**, 283-287, 1978.

Ericksen³¹⁹ ha tentato di rispondere all'*Hauptproblem* di Truesdell³²⁰ sulla scelta delle classi di funzioni-lavoro in grado di esprimere il comportamento dei solidi elastici ad ogni livello di deformazione, formulando come possibile risposta che, «when experiments fail us, we can turn to some form of mechanistic theory. For homogeneous materials, this is most likely to be molecular theory of some form»³²¹.

Lo stesso Hill³²², in collaborazione con Milstein, ha poi sviluppato i suoi propositi teorici studiando estesamente il comportamento di cristalli cubici monoatomici a pressione arbitraria, ricorrendo al potenziale a due corpi di Morse

$$\Phi(r) = D \exp[-2\alpha (r - r_0)] - 2D \exp[\alpha(r - r_0)],$$

ove D è l'energia di legame rispondente alla distanza d'equilibrio r_0 e α un parametro da assegnare caso per caso (con dimensioni inverse di una lunghezza). Gli autori hanno mostrato che, sotto una pressione P , i tre moduli elastici del cristallo, cioè quello di compressibilità k e i due tangenziali μ e μ_1 , sussiste la condizione

$$k - \frac{2}{3}\mu = \mu_1 + 2P$$

generalizzante la relazione di Cauchy (II.10.9) per qualsiasi valore di P .

Infine, ad un livello intermedio di analisi, ma nello stesso intento di far sì che «le macroscopique du physicien ne soit plus trop éloigné du microscopique du mécanicien»³²³, si sono sviluppate negli ultimi decenni, sulla scia dei primi lavori di Voigt, promettenti tecniche d'omogeneizzazione in grado di rappresentare, attraverso gli strumenti e i metodi propri della meccanica del continuo, le eterogeneità caratteristiche dei materiali ad una predefinita scala dimensionale.

319 Ericksen J. L., "Special topics in elastostatics", *Advances in applied mechanics*, **17**, 189-244, 1977; "On the symmetry of deformable crystals", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **72**, 1-13, 1979; "Changes in symmetry in elastic crystals", *Proc. of the IUTAM Symposium on finite elasticity*, 167-177, 1982, tenuto alla Lehigh University, Bethlehem, PA, USA, agosto 10-15, 1980.

320 Truesdell C., "Das ungelöste Hauptproblem der endlichen Elastizitätstheorie", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **36**, 97-103, 1956.

321 Ericksen J. L., "Special topics ...", p. 224.

322 Hill R., Milstein F., "Theoretical properties of cubic crystals at arbitrary pressure. I. Density and bulk modulus", *Journal of the mechanics and physics of solids*, **25**, 457-477, 1977; "II. Shear moduli", *Idem*, **26**, 213-239, 1978; "III. Stability", *Idem*, **27**, 255-279, 1979. Precedenti ricerche di Milstein sono raccolte negli articoli "Theoretical strength of a perfect crystal", *Physical Review.*, **3B**, 1130-1141, 1971 e "Theoretical strength of a perfect crystal with exponentially attractive and repulsive interatomic interactions", *Journal of applied physics*, **44**, 3833-3840, 1973.

323 Zaoui A., "Matériaux hétérogènes", École polytechnique, Département de Mécanique, Paris, 1991, p. 4.

III. 7. Due possibili ipotesi di raccordo fra teoria molecolare e teoria del continuo.

A conclusione di questo rapido *excursus* sulle recenti “connivenze” fra meccanici del continuo e fisici della materia, vogliamo suggerire due possibili vie sostanzialmente in linea con le problematiche sopra accennate, nell'intento di mostrare come sia possibile superare le relazioni di Cauchy senza abbandonare la proposizione essenziale dell'originaria teoria molecolare, ovvero l'ipotesi del potenziale nella forma

$$(III.7.1) \quad \Phi(r, r', r'', \dots) = F(r) + F_1(r') + F_2(r'') + \dots$$

1. Aggiornando la teoria di Voigt alla cinematica dei corpi micropolari³²⁴.

A tal fine è sufficiente tener conto del fatto che, all'introduzione delle micro-coppie operata inizialmente da Voigt deve corrispondere, per coerenza, la considerazione della geometria della deformazione propria dei corpi micropolari, ovvero, nell'ambito di spostamenti infinitesimi

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} + \delta_{ijl} \omega_l$$

$$\kappa_{ij} = \omega_{j,i}$$

ove, al solito, ω_i designa le componenti della rotazione, κ_{ij} quelle di curvatura e δ_{ijl} è l'alternatore di Ricci.

Ipotizzando l'esistenza di un potenziale $\Phi(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij})$ tale che

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \mu_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_{ij}}$$

si può porre

$$2\Phi(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}) = A_{ijhk} \kappa_{ij} \kappa_{hk} + B_{ijhk} \varepsilon_{ij} \kappa_{hk} + C_{ijhk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk}$$

Ora, affinché sia conservata la (III.7.1), i coefficienti elastici devono avere la forma

³²⁴ Benvenuto E., Foce F., “Alle origini della micro-meccanica dei materiali. Cenni storici al problema delle relazioni di Cauchy”, *Atti del Convegno Nazionale del Gruppo AIMETA di Meccanica dei Materiali e delle Strutture*, Amalfi 3-5 giugno 1991, 7-13, 1992.

$$A_{ijhk} = \sum_{\mu\nu} A(\mu\nu) \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h \Delta x_k$$

$$B_{ijhk} = \sum_{\mu\nu} B(\mu\nu) \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h \Delta x_k$$

$$C_{ijhk} = \sum_{\mu\nu} C(\mu\nu) \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_h \Delta x_k ,$$

ove la somma si intende estesa alle coppie di molecole μ, ν distanti inizialmente Δx_i (con $i = 1, 2, 3$) e $A(\mu\nu), B(\mu\nu), C(\mu\nu)$ sono quantità costanti.

Se allora, nello spirito di Voigt, si impone $\mu_{ij} = 0$, si perviene a nove equazioni del tipo

$$B_{ijhk} \varepsilon_{hk} + A_{ijhk} \kappa_{hk} = 0 ,$$

dalle quali si trae

$$\kappa_{ij} = - \{A_{ijhk}\}^{-1} B_{ijhk} \varepsilon_{hk} = \Pi_{ijhk} \varepsilon_{hk} .$$

Il potenziale assume quindi la forma

$$2\Phi = (C_{ijhk} + B_{ijmn} \Pi_{mnhk} + B_{rsmn} \Pi_{ijrs} \Pi_{mnhk}) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk} = D_{ijhk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk}$$

per la quale, in generale, i coefficienti D_{ijhk} non soddisfano le relazioni di Cauchy. Per rendersene conto, è sufficiente esaminare il caso in cui si abbia $\varepsilon_{ij} = 0$ e $\kappa_{ij} = 0$ eccetto che per $i = j = 1$ e considerare un sistema di tre molecole μ, ν, λ . Si trova allora, svolgendo le somme ed indicando in parentesi la coppia di molecole considerata

$$A_{1111} = A(\mu\nu) \Delta x_1^4(\mu\nu) + A(\nu\lambda) \Delta x_1^4(\mu\lambda) + A(\lambda\mu) \Delta x_1^4(\lambda\mu)$$

$$B_{1111} = B(\mu\nu) \Delta x_1^4(\mu\nu) + B(\nu\lambda) \Delta x_1^4(\mu\lambda) + B(\lambda\mu) \Delta x_1^4(\lambda\mu)$$

$$C_{1111} = C(\mu\nu) \Delta x_1^4(\mu\nu) + C(\nu\lambda) \Delta x_1^4(\mu\lambda) + C(\lambda\mu) \Delta x_1^4(\lambda\mu)$$

da cui

$$\kappa_{ij} = \frac{B(\mu\nu) \Delta x_1^4(\mu\nu) + B(\nu\lambda) \Delta x_1^4(\mu\lambda) + B(\lambda\mu) \Delta x_1^4(\lambda\mu)}{A(\mu\nu) \Delta x_1^4(\mu\nu) + A(\nu\lambda) \Delta x_1^4(\mu\lambda) + A(\lambda\mu) \Delta x_1^4(\lambda\mu)} \varepsilon_{ij}$$

Si riconosce pertanto che i coefficienti D_{ijhk} non soddisfano le relazioni di Cauchy salvo che nel caso in cui $B(\mu\nu) = B(\nu\lambda) = B(\lambda\mu)$ e $A(\mu\nu) = A(\nu\lambda) = A(\lambda\mu)$.

2. Muovendosi entro il quadro delle tecniche di omogeneizzazione³²⁵.

Nel paragrafo I.3 abbiamo accennato a diversi “statuti” metodologici sui quali la teoria molecolare e quella del continuo fondano le rispettive definizioni del concetto di tensione. Riprendendo le fila del discorso, vorremmo ora indicare un'eventuale altra via che potrebbe consentire la rimozione delle relazioni di Cauchy senza dover necessariamente ricorrere ad ipotesi atomistiche improntate al modello micropolare, ma semplicemente adattando al nostro scopo elementari concetti tratti dalle tecniche dell'odierna meccanica dei materiali per il passaggio dalla struttura locale di un mezzo eterogeneo al suo comportamento macroscopico³²⁶. Si tratta, in fondo, di un'idea in qualche modo intuita da Clausius col riferimento al *Normalsystem* e formalizzata da Voigt “mediando” la transizione dall'aggregato policristallino eterogeneo all'equivalente solido omogeneo.

In sostanza, lo spunto consiste nel tentativo di allacciare una relazione tra le due definizioni di tensione, ritenendo che quella afferente alla teoria molecolare valga entro il volume elementare rappresentativo (V.E.R.) associato ad ogni punto P (di coordinate y_i , con $i = 1, 2, 3$ all'istante t) del corpo C riguardato macroscopicamente come continuo in un dominio D , per il quale invece la tensione resta definita *a priori* secondo i concetti della meccanica del continuo. Ciò che ha generato appunto la disputa sulle costanti elastiche è stato il convincimento che tra le due definizioni non esistesse differenza *materiale*, ma si trattasse di due approcci *formalmente* contrapposti per giungere allo stesso concetto, nell'un caso considerato “subalterno” alla cinematica della deformazione, nell'altro caso assunto come “primitivo”. Nell'ottica qui prospettata, invece, il rapporto tra le due definizioni potrebbe essere stabilito in base a procedure analoghe a quelle adottate per l'omogeneizzazione di un materiale eterogeneo.

Come noto, in tale contesto, l'eterogeneità del materiale viene rappresentata, all'interno di ogni V.E.R. $V(y_i)$, mediante la definizione di campi di spostamento $\mathbf{u}(x_i, t)$, di deformazione $\varepsilon(x_i, t)$ e di tensione $\sigma(x_i, t)$, definiti nei punti x_i del V.E.R. ed accuratamente desunti dalle proprietà intrinseche del materiale stesso: nell'applicazione al nostro problema si tratta di imporre la condizione che lo stato tensione $\sigma(x_i, t)$ provenga da ipotesi generali di comportamento materiale che siano compatibili con l'assunto epistemologico della teoria molecolare (pur senza necessariamente far appello a specifiche ipotesi atomistiche: vedansi, ad esempio, il recente tentativo di Campanella e Tonon³²⁷ tendente a tradurre le relazioni di

325 Benvenuto E., Corradi M., Foce F., “Considerazioni critiche sulle cosiddette “relazioni di Cauchy””, *Atti XI Congresso Nazionale AIMETA, Meccanica dei solidi e delle Strutture*, Trento 28 settembre-2 ottobre, 1992, 79-84.

326 Cfr., ad esempio, il citato lavoro di A. Zaoui.

327 Campanella A., Tonon M. L., “A note on the Cauchy relations”, in corso di pubblicazione.

Cauchy in termini di restrizione del tensore di elasticità pur nell'ambito della teoria continuista).

Nel punto $P(y_i, t)$ appartenente al corpo C riguardato come continuo, restano definiti invece i campi di spostamento $U(y_i, t)$, di deformazione $E(y_i, t)$ e di tensione $\Sigma(y_i, t)$ la cui connessione con lo stato relativo al V.E.R., nell'ipotesi di deformazioni o di tensioni omogenee e nell'ambito di una teoria linearizzata, è affidato rispettivamente alle relazioni di localizzazione

$$\epsilon_{ij} = A_{ijhk} E_{hk} \quad \sigma_{ij} = B_{ijhk} \Sigma_{hk}$$

dove i tensori A_{ijhk} e B_{ijhk} godono delle sole simmetrie deboli

$$A_{ijhk} = A_{jihk} = A_{ijkh} \quad B_{ijhk} = B_{jihk} = B_{ijkh} .$$

Adottando, ad esempio, una tecnica di confronto di tipo energetico, suffragata dal noto lemma di Hill³²⁸, si dimostra che, se $c_{ijhk}(x_i, t)$ e $s_{ijhk}(x_i, t)$ sono i tensori di comportamento elastico microscopico relativi al V.E.R., i corrispondenti tensori $C_{ijhk}(y_i, t)$ e $S_{ijhk}(y_i, t)$ di comportamento elastico macroscopico sono espressi da

$$(III.7.2) \quad C_{ijhk}(y_i, t) = \langle A_{ijpq} c_{pqrs} A_{rshk} \rangle \quad S_{ijhk}(y_i, t) = \langle B_{ijpq} s_{pqrs} B_{rshk} \rangle$$

dove il simbolo $\langle \rangle$ indica la media intesa nel senso

$$\langle g(x_i, t) \rangle = \frac{1}{\text{mis}\{V(y_i)\}} \int_{V(y_i)} g(x_i, t) dV .$$

Orbene, la semplice ispezione delle (III.7.2) mostra che, ancorché per $c_{ijhk}(x_i, t)$ e $s_{ijhk}(x_i, t)$ valgano le relazioni di Cauchy, tali ulteriori simmetrie non possono essere asserite in generale per $C_{ijhk}(y_i, t)$ e $S_{ijhk}(y_i, t)$, ai quali convengono soltanto le simmetrie deboli e forti previste dalla teoria di Green. Il problema sta dunque nel verificare quali condizioni debbano essere imposte al comportamento del materiale entro il V.E.R. affinché sia preservata o meno, nel passaggio dal micro al macro, la validità delle relazioni di Cauchy: il che, presumibilmente, sarà realizzato per particolari specificazioni dei tensori di localizzazione oltre che dalle proprietà intrinseche del materiale.

328 Hill R., "Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals", *Journal of mechanics and physics of solids*, **13**, 89-101, 1965.

III. 8. Conclusioni.

Nell'intento di raccogliere le fila di questa lunga vicenda ed emettere un verdetto finale che tenga conto delle osservazioni di Love riportate nell'Introduzione, sarebbe forse ingiusto, dopo un "primo grado" di condanna, non ammettere un successivo "appello" ad un giudizio che volesse negato ogni valore alla formulazione molecolare dell'elasticità. Non certo "per mancanza di prove", come le definitive esperienze di Voigt (1887-'89) hanno rivelato per la sua originaria impostazione, ma per il fatto che, rimosso il pregiudizio che aveva trattenuto Saint-Venant da qualsiasi concessione, l'ipotesi atomistica riesce a conseguire risultati formalmente in accordo con quella del continuo; lo stesso Love, peraltro, a conclusione della già citata *Note B* aggiunta all'ultima edizione del suo trattato (1927), mostrò una volta di più come la definizione "molecolarista" di tensione, appoggiata all'ipotesi dell'esistenza di un potenziale elastico funzione quadratica della deformazione, sia perfettamente compatibile con gli esiti generali della teoria matematica dell'elasticità.

D'altra parte l'adozione del modello molecolare trattiene valenze significative sia sul piano teorico sia in relazione alle applicazioni più recenti nel campo della scienza dei materiali. Da un lato infatti, l'impostazione atomica, aggiornata alla luce delle moderne cognizioni, può offrirsi quale naturale continuazione del programma di Carnot per una fondazione generale della meccanica sui concetti della cinematica, secondo la linea abbozzata nel paragrafo III.7.(2) con riferimento alle tecniche di omogeneizzazione per materiali eterogenei. Dall'altro, benché sia perfettamente giustificato il pensiero di Truesdell per il quale fenomeni macroscopici come l'elasticità «are most naturally, accurately, and elegantly represented by gross hypothesis», permane l'esigenza di allacciare un più fecondo rapporto fra fisica e meccanica dei solidi; ciò che può realizzarsi, ad esempio, attraverso il ricorso alle ipotesi di comportamento materiale ispirate al modello micropolare, in linea con l'impostazione tratteggiata nel paragrafo III.7.(1).

È in questo spirito, in fondo, che si è andata indirizzando la ricerca a partire dal ricordato Symposium IUTAM (1967), col precipuo intento di ricucire, alla luce dei rinnovati rapporti fra macro, meso e micro-meccanica, la cesura progressivamente apertasi nel corso della vicenda storica fra la formulazione continuista e quella atomica dell'elasticità.

Bibliografia

- 1823 CAUCHY A.-L., “Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques”, *Bulletin des sciences par la Société Philomatique de Paris*, 9-13, Paris; letto all'Académie Royale des Sciences il 30 settembre 1822.
- 1823 NAVIER C.-L., “Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques”, *Bulletin des sciences par la Société Philomatique de Paris*, 177-181, Paris.
- 1827 CAUCHY A.-L., “De la pression ou tension dans un corps solide”, *Exercices de Mathématiques*, **2**, 42-56, 1827; “Addition à l'article précédent”, 57-59.
- 1827 CAUCHY A.-L., “Sur la condensation et la dilatation des corps solides”, *Exercices de Mathématiques*, **2**, 60-69.
- 1827 CAUCHY A.-L., “Sur les relations qui existent, dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices”, *Exercices de Mathématiques*, **2**, 108-111.
- 1827 NAVIER C.-L., “Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques”, *Mémoires de l'Institut National*, **7**, 375-393; letto all'Académie des Sciences il 14 maggio 1821.
- 1827 POISSON S.-D., “Mémoire sur le calcul numérique des intégrales définies”, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, **6**, 571-604.
- 1827 POISSON S.-D., “Note sur les vibrations des corps sonores”, *Annales de chimie et de physique*, **35**, 86-93, septembre.
- 1828 CAGNIARD DE LA TOUR C., “Note sur l'élasticité des cordes métalliques”, *La Globe*, **6**, n° 19, 107-108.
- 1828 CAUCHY A.-L., “Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique”, *Exercices de Mathématiques*, **3**, 160-187.
- 1828 CAUCHY A.-L., “Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle”, *Exercices de Mathématiques*, **3**, 188-212.
- 1828 CAUCHY A.-L., “De la pression ou tension dans un système de points matériels”, *Exercices de Mathématiques*, **3**, 213-236.
- 1828 NAVIER C.-L., “Note relative à l'article intitulé: Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, page 337 du tome précédent”, *Annales de chimie et de physique*, **38**, 304-314, juillet.
- 1828 NAVIER C.-L., “Remarques sur l'article de M. Poisson, insérée dans le Cahier d'août, page 435”, *Annales de chimie et de physique*, **39**, 145-151.
- 1828 POISSON S.-D., “Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques”, *Annales de chimie et de physique*, **37**, 337-355, avril.

- 1828 POISSON S.-D., “Réponse à une note de M. Navier insérée dans le dernier Cahier de ce Journal”, *Annales de chimie et de physique*, **38**, 435-440, août.
- 1828 POISSON S.-D., “Lettre de M. Poisson à M. Arago”, *Annales de chimie et de physique*, **39**, 204-211, octobre.
- 1829 ARAGO F., “Note du rédacteur”, *Annales de chimie et de physique*, **40**, 107-110, janvier.
- 1829 CAUCHY A.-L., “Sur les équations différentielles d'équilibre ou de mouvements pour système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle”, *Exercices de Mathématiques*, **4**, 129-139.
- 1829 CAUCHY A.-L., “Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues”, *Exercices de Mathématiques*, **4**, 293-319.
- 1829 DUHAMEL J. M. C., “Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques”, *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques (Férussac)*, **11**, 98-111.
- 1829 NAVIER C.-L., “Lettre de M. Navier à M. Arago”, *Annales de chimie et de physique*, **40**, 99-107, janvier.
- 1829 POISSON S.-D., “Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques”, *Mémoires de l'Académie Royale de Sciences de l'Institut*, **8**, 353-570; “Addition au mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques”, 623-627; letto all'Académie des Sciences il 14 aprile 1828.
- 1829 POISSON S.-D., “Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques et des fluides”, *Annales de chimie et de physique*, **42**, 145-171, octobre.
- 1830 CAUCHY A.-L., *Mémoire sur la théorie de la lumière*, Paris, 1830. Pubblicato con lo stesso titolo in *Mémoires de l'Institut de France*, **10**, 293-316, 1831 e letto all'Académie il 31 maggio, il 7 giugno e il 14 giugno.
- 1830 POISSON S.-D., “Mémoire sur l'équilibre des fluides”, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, **9**, 1-88; letto all'Académie des Sciences il 24 novembre 1828.
- 1831 POISSON S.-D., “Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides”, *Journal de l'École polytechnique*, **13**, Cahier 20, 1-174.
- 1832 BELLI G., “Riflessioni sulla legge dell'attrazione molecolare”, *Opuscoli matematici e fisici di diversi autori*, **1**, 25-68, 128-168, 237-261.
- 1832 DUHAMEL J. M. C., “Mémoire sur les équations générales de la propagation de la chaleur dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens”, *Journal de l'École polytechnique*, **13**, Cahier 21, 356-399; letto all'Académie des Sciences il 7 aprile 1828.
- 1832 PIOLA G., “La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni”, *Opuscoli matematici e fisici di diversi autori*, **1**, 201-236.

- 1833 LAMÉ G., CLAPEYRON B. P. E., “Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes”, *Mémoires présentés par divers savans à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, **4**, 465-562.
- 1834 NEUMANN Fr., “Über das Elasticitätsmaass krystallinischer Substanzen der homoëdrischen Abtheilung”, *Annalen der Physik und Chemie*, **31**, 177-192.
- 1836 MOSSOTTI O. F., *Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps aperçu pour servir à la détermination de la cause et des lois de l'action moléculaire*, Torino.
- 1836 PIOLA G., “Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare”, *Memorie della Società italiana delle scienze di Modena*, **21**, 155-321.
- 1837 BARRÉ DE SAINT-VENANT A. J. C., *Leçons de mécanique faites par intérim par M. de Saint-Venant, Ingénieur des ponts et chaussées, 1837 à 1838*.
- 1838 COLLADON J. D., STURM J. C. F., “Mémoire sur la compression des liquides”, *Mémoires présentés par divers savans à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, **5**, 267-347.
- 1838 DUHAMEL J. M. C., “Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides”, *Mémoires présentés par divers savans à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, **5**, 440-498.
- 1839 CAUCHY A.-L., “Mémoire sur la constitution de molécules intégrantes et sur les mouvements atomiques des corps cristallisés”, *Comptes rendus*, **9**, II sem., 558-560.
- 1839 CAUCHY A.-L., “Mémoire sur les pressions et tensions dans un double système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle”, *Comptes rendus*, **9**, II sem., 588-590.
- 1839 GREEN G., “On the laws of Reflection and Refraction of Light at the common surface of two non-crystallized Media”, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **7**, (1838-1842), 1-24; letto l'11 dicembre 1837. “Supplement to a memoir on the Reflexion and Refraction of Light”, *Idem*, 113-120; letto il 6 maggio 1839. Anche in *Mathematical and Physical Papers of the late George Green*, 243-269; 281-290, London, 1871.
- 1840 BLANCHET P. H., “Mémoire sur la propagation et la polarisation du mouvement dans un milieu élastique indéfini cristallisé d'une manière quelconque”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, I sér., **5**, 1-30.
- 1840 CAUCHY A.-L., “Mémoire sur les mouvements infiniment petits d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle”, *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, **1**, 1-15.
- 1840 CAUCHY A.-L., “Mémoire sur les mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui si pénètrent mutuellement”, *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, **1**, 33-52, 1840.
- 1840 CAUCHY A.-L., “Mémoire sur les mouvements infiniment petits dont les équations présentent une forme indépendant de la direction des trois axes coordonnés, supposés rectangulaires, ou seulement de deux de ces axes”, *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, **1**, 101-132.

- 1840 CAUCHY A.-L., “Mémoire sur la réflexion et la réfraction d'un mouvement simple transmis d'un système de molécules à un autre, chacun de ces deux systèmes étant supposé homogène et tellement constitué que la propagation des mouvements infiniment petits s'y effectue en tous sens suivant les mêmes lois”, *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, **1**, 133-177.
- 1841 CAUCHY A.-L., “Mémoire sur les dilatations, les condensations et les rotations produites par un changement de forme dans un système de points matériels”, *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, **2**, 302-330.
- 1841 GREEN G., “On the propagation of Light in crystallized Media”, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **7**, (1838-1842), 121-140; letto il 20 maggio 1839. Anche in *Mathematical and Physical Papers of the late George Green*, 291-311, London, 1871.
- 1842 POISSON S.-D., “Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés”, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, **18**, 3-152; letto all'Académie des Sciences il 28 ottobre 1839.
- 1842 REGNAULT H. V., “Note sur la dilatation du verre”, *Annales de chimie et de physique*, III sér., **4**, 64-67.
- 1843 CAUCHY A.-L., “Notes sur les pressions supportées, dans un corps solide ou fluide, par deux portions de surface très-voisines, l'une extérieure, l'autre intérieure à ce même corps”, *Comptes rendus*, **16**, I sem., 151-155.
- 1843 CAUCHY A.-L., “Mémoire sur les pressions ou tension intérieures, mesurées dans un ou plusieurs systèmes de points matériels que sollicitent des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle”, *Comptes rendus*, **16**, I sem., 299-308, 954-967, 1035-1039.
- 1844 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Sur la définition de la pression dans les corps fluides ou solides en repos ou en mouvement”, *L'Institut*, n° 524, 12-13; letto alla Société Philomatique il 30 dicembre 1843 ed apparso tra i suoi estratti del 1843 alle pp.134-138.
- 1844 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continus, et sur la nature probable des dernières particules des corps”, *Société Philomatique de Paris*, 3-15; letto alla Société Philomatique il 20 gennaio 1844. Apparso in Belgio nel giornale *Le Catholique* del 1852.
- 1845 BONNET O., “Mémoire sur la theorie des corps élastiques”, *Journal de l'École polytechnique*, Cahier 30, 171-191.
- 1845 CAUCHY A.-L., “Notes relatives à la mécanique rationnelle”, *Comptes rendus*, **20**, I sem., 1760-1766; letto il 23 giugno 1845.
- 1845 CAUCHY A.-L., “Observations sur la pression que supporte un élément de surface plane dans un corps solide ou fluide”, *Comptes rendus*, **21**, II sem., 125-133.
- 1845 CAUCHY A.-L., “Mémoire sur les secours que les sciences de calcul peuvent fournir aux sciences physiques ou même aux sciences morales, et sur l'accord des théories mathématiques et physiques avec la véritable philosophie”, *Comptes rendus*, **21**, II sem., 134-143.

- 1845 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., "Note sur la pression dans l'intérieur des corps ou à leurs surfaces de séparation", *Comptes rendus*, **21**, II sem., 24-26.
- 1845 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., "Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la Mécanique", *Comptes rendus*, **21**, II sem., 620-625.
- 1846 HAUGHTON S., "On the Laws of Equilibrium and Motion of Solid and Fluid Bodies", *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, **1**, 173-182; **2**, 100-108, 1847.
- 1847 REGNAULT H. R., "Relations des expériences ... pour déterminer les principales lois et les données numériques qui entrent dans les calculs des machines à vapeur. Septième mémoire: De la compressibilité des liquides", *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, **21**, 429-464.
- 1847 STOKES G. G., "On the theories of internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **8**, 287-319; letto il 14 aprile 1845. Anche in *Mathematical and physical papers*, **1**, 75-129, 1880.
- 1848 DUHAMEL J. M. C., "Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les cristaux", *Journal de l'École polytechnique*, **19**, Cahier 32, 155-188.
- 1848 HAUGHTON S., "On the Equilibrium and Motion of solid and fluid Bodies", *Transactions of the Royal Irish Academy*, **21**, 151-198; letto il 25 maggio 1846. Già pubblicato in forma più concisa sul *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, **1**, 173-182, 1846; **2**, 100-108, 1847.
- 1848 WERTHEIM G., "Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes", *Annales de chimie et de physique*, III sér., **23**, 52-95, mai; letto all'Académie des Sciences il 10 febbraio 1848.
- 1849 CAUCHY A.-L., "Mécanique moléculaire", *Comptes rendus*, **28**, I sem., 2-6.
- 1849 CLAUSIUS R., "Ueber die Veränderungen, welche in den bisher gebräulichen Formeln für das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer fester Körper durch neuere Beobachtungen nothwendig geworden sind", *Annalen der Physik und Chemie*, **76**, 46-67.
- 1849 HAUGHTON S., "On a Classification of Elastic Media, and the Laws of Plane Waves propagated through them", *Transactions of the Royal Irish Academy*, **22**, **1**, 97-138.
- 1849 WERTHEIM G., "Notes sur la torsion des verges homogènes", *Annales de chimie et de physique*, III sér., **25**, 209-215.
- 1850 BRAVAIS A., "Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace", *Journal de l'École polytechnique*, **19**, Cahier 33, 1-128; letto all'Académie des Sciences l'11 dicembre 1848.
- 1850 CAUCHY A.-L., "Mémoire sur les systèmes isotropes de points matériels", *Mémoires de l'Académie Royal des Sciences*, **22**, 615-654.

- 1851 CAUCHY A.-L., “Note sur l'équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides”, *Comptes rendus*, **32**, I sem., 323-326.
- 1851 CAUCHY A.-L., “Rapport sur divers Mémoires de M. Wertheim”, *Comptes rendus*, **32**, I sem., 326-330, 1851; letto all'Académie des Sciences il 3 marzo 1851.
- 1851 RANKINE W. J. M., “Laws of Elasticity of Solid Bodies”, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, **6**, 47-80, 178-181, 185-186; letto alla British Association il 1° agosto 1850. Anche in *Miscellaneous Scientific Papers*, 67-101, London, 1881.
- 1852 JELLET J. H., “On the Equilibrium and Motion of an Elastic Solid”, *Transactions of the Royal Society Academy*, **22**, II, 179-217; letto il 28 gennaio 1850.
- 1852 LAMÉ G., “Note sur la théorie de l'élasticité des corps solides”, *Comptes rendus*, **35**, II sem., 459-464.
- 1852 LAMÉ G., *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris.
- 1853 MAXWELL J. C., “On the equilibrium of elastic solids”, *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, **20**, 87-120; letto il 18 febbraio 1850. Anche in *Scientific Papers*, **1**, 30-73, 1890.
- 1854 CAUCHY A.-L., “Points associés. Rayons vecteurs associés. Avantages de leur emploi dans les problèmes de physique mathématique”, *L'Institut, Journal universel des sciences et des société savantes en France et a l'étranger*, **22**, 29-30; letto all'Académie des Sciences il 23 gennaio 1854.
- 1855 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Diverses considérations sur l'élasticité des corps, sur les actions entre leurs molécules, sur leurs mouvements vibratoires atomiques et sur leur dilatation par la chaleur”, *L'Institut*, **23**, 440-442; letto all'Académie des Sciences il 20 ottobre 1855.
- 1855 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance a divers efforts s'exerçant simultanément”, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France*, **14**, 233-560; letto all'Académie des Sciences il 13 giugno 1853.
- 1856 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Sur les conséquences de la théorie de l'élasticité en ce qui regarde la théorie de la lumière”, *L'Institut*, **24**, 32-34; letto il 23 dicembre 1855.
- 1856 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissement transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, II sér., **1**, 89-189.
- 1856 RANKINE W. J. C., “On Axes of Elasticity and Crystalline Forms”, *Philosophical Transactions*, 261-285; letto il 21 giugno 1855. Anche in *Miscellaneous Scientific Papers*, 119-149.

- 1856 THOMSON W., “Elements of a mathematical theory of elasticity”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **146**, 481-498; letto il 24 aprile 1856.
- 1857 KOOSEN J. H., “Entwicklung der Fundamentalgesetze über die Elasticität und das Gleichgewicht im Innern chemisch homogener Körper”, *Annalen der Physik*, **101**, 401-452.
- 1857 THOMSON W., “On the thermo-elastic and thermo-magnetic properties of matter”, *Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, **1**, 57-77.
- 1857 WERTHEIM G., “Mémoire sur la torsion”, *Annales de chimie et de physique*, III sér., **50**, 195-287, juin; letto all'Académie des Sciences nella seduta del 19 febbraio 1855.
- 1858 CLAPEYRON B. P. E., “Mémoire sur le travail des forces élastiques dans un corps solide élastique déformé par l'action de forces extérieures”, *Comptes rendus*, **46**, I sem., 208-212.
- 1859 KIRCHHOFF G., “Ueber das Verhältniß der Quercontraction zur Längedilatation bei Stäben von federhartem Stahl”, *Annalen der Physik und Chemie*, **108**, 369-392.
- 1859 LAMÉ G., *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, 1859.
- 1860 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Mémoires sur les divers genres d'homogénéité mécanique des corps solides élastiques, et principalement sur l'homogénéité semi-polaire ou cylindrique, et sur l'homogénéité polaire ou sphérique”, *Comptes rendus*, **50**, I sem., 930-934.
- 1860 CLEBSCH A., “Theorie der circularpolarisirenden Medien”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **57**, 319-358.
- 1860 NEUMANN C., “Zur Theorie der Elasticität”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **57**, 281-318.
- 1861 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Sur le nombre des coefficients inégaux des formules donnant les composantes des pressions dans l'intérieur des solides élastiques”, *Comptes rendus*, **53**, II sem., 1107-1112.
- 1861 LORENZ L., “Mémoire sur la théorie de l'élasticité des corps homogènes à élasticité constante”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **58**, 329-351..
- 1862 CLEBSCH A., *Theorie der Elasticität fester Körper*, Leipzig.
- 1863 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un fluide de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope”, *Comptes rendus*, **56**, I sem., 475-479.
- 1863 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, II sér., **8**, 257-295; 353-430, 1863; letto all'Académie des Sciences il 16 marzo 1863.

- 1864 NAVIER C.-L., *Résumé des Leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines, avec des Notes et des Appendices par M. Barré de Saint-Venant*, Paris.
- 1865 BARRÉ de SAINT-VENANT A.J.C., “Mémoire sur les divers genres d'homogénéité des corps solides, et principalement sur l'homogénéité *semi-polaire* ou cylindrique, et sur les homogénéités *polaires* ou sphéroidique et sphérique”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, II sér., **10**, 297-349; letto all'Académie des Sciences il 21 maggio 1860 ed apparso in estratto sui *Comptes rendus*, **50**, I sem., 930-934, 1860.
- 1865 DE COMMINES DE MARSILLY L. J. A., *Recherches mathématiques sur les lois fondamentales du monde physique. Premier mémoire. Actions simples*, Paris.
- 1865 THOMSON W., “On the elasticity and viscosity of metals”, *Proceedings of the Royal Society of London*, **14**, 289-297.
- 1867 BOUSSINESQ J., “Note sur l'action réciproque de deux molécules”, *Comptes rendus*, **64**, 44-46.
- 1867 THOMSON W., TAIT P. G., *Treatise on Natural Philosophy*, **1**, Oxford.
- 1868 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Formules de l'élasticité des corps amorphes que des compressions permanentes et inégales ont rendus hétérotropes”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, II sér., **13**, 242-254.
- 1868 DE COMMINES DE MARSILLY L. J. A., *Recherches mathématiques sur les lois de la matière*, Paris.
- 1868 MOIGNO F.-N.-M., *Leçons de mécanique analytique*, Paris.
- 1869 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Note sur les valeurs que prennent les pressions dans un solide élastique isotrope lorsque l'on tient compte des dérivées d'ordre supérieur des déplacement très-petits que leurs points ont éprouvés”, *Comptes rendus*, **78**, I sem., 569-571.
- 1869 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Sur un potentiel de deuxième espèce, qui résout l'équation aux différences partielles du quatrième ordre exprimant l'équilibre intérieur des solides élastiques amorphes non isotropes”, *Comptes rendus*, **79**, II sem., 1107-1110.
- 1869 BEER A., *Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität*, herausgegeben von A.Giesen, Leipzig.
- 1869 CORNU A., “Méthode optique pour l'étude de la déformation de la surface extérieure des solides élastiques”, *Comptes rendus*, **69**, II sem., 333-337.
- 1871 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Formules des augmentation que des petits déformations d'un solide apportent aux pressions ou forces élastiques, supposées considérables, qui déjà étaient en jeu dans son intérieur. Complément et modification du préambule du mémoire: *Distribution des élasticités autour de chaque point, etc.*, que a été inséré en 1863 au *Journal de mathématiques, Journal de mathématiques pures et appliquées*”, **16**, II sér., 275-307.

- 1873 BOUSSINESQ J., “Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **18**, 305-360; letto all'Académie des Sciences et des Lettres de Montpellier l'8 luglio 1872.
- 1876 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Sur la manière dont les vibrations calorifiques peuvent dilater les corps, et sur le coefficient des dilatations”, *Comptes rendus*, **82**, I sem., 33-39.
- 1876 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Sur la constitution atomique des corps”, *Comptes rendus*, **82**, I sem., 1223-1226.
- 1876 KIRCHHOFF G., *Vorlesungen über mathematische Physik*, Leipzig.
- 1876 VOIGT W., “Bestimmung der Elasticitätsconstanten des Steinsalzes”, *Annalen der Physik und der Chemie*, **159**, 601-616.
- 1877-8 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “De la constitution des atomes”, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, **2**, 417-456; “Complément”, 1-39.
- 1878 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Des paramètres d'élasticité des solides, et de leur détermination expérimentale”, *Comptes rendus*, **86**, I sem., 781-785.
- 1878 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Sur la dilatation des corps échauffés et sur les pressions qu'ils exercent”, *Comptes rendus*, **87**, II sem., 713-718.
- 1878 GRASHOF F., *Theorie der Elasticität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Technik*, Berlin.
- 1879 CASTIGLIANO A., *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, Torino.
- 1882 VOIGT W., “Ueber das Verhältnis der Quercontraction zur Längendilatation bei Stäben von isotropem Glas”, *Annalen der Physik und Chemie*, **15**, 497-513.
- 1883 CLEBSCH A., *Théorie de l'élasticité des corps solides, traduite par MM. Barré de Saint-Venant et Flamant, avec des Notes étendues de M. de Saint-Venant*, Paris.
- 1884 AMAGAT É. H., “Sur la valeur du coefficient de Poisson relative au caoutchouc”, *Comptes rendus*, **99**, 130-133.
- 1884 BERTHOT P., “Sur les effect des forces mutuelles”, *Comptes rendus*, **98**, I sem., 1570-1573.
- 1884 BARRÉ de SAINT-VENANT A. J. C., “Remarques relatives à la note de M. Berthot sur les actions entre les molécules des corps”, *Comptes rendus*, **99**, II sem., 5-7.
- 1884 DE COMMINES DE MARSILLY L. J. A., *Les lois de la matière. Essais de mécanique moléculaire*, Paris.
- 1884 THOMSON W., *Notes of Lectures on molecular dynamics and the theory of light. Delevered at the Johns Hopkins University, Baltimore. Stenographically reported by A.S.Hathaway*, Baltimore.

- 1884 VOIGT W., "Neue Bestimmungen der Elasticitätsconstanten von Steinsalz und Flussspath", *Sitz.ber. Akad. Wiss. Berlin*, 989-1004.
- 1884 WEYRAUCH J. J., *Theorie elastischer Körper. Eine Einleitung zur mathematischen Physik und technischen Mechanik*, Leipzig.
- 1885 NEUMANN Fr., *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers, herausgegeben von Oskar Emil Meyer*, Leipzig.
- 1886 GLAZEBROOK R. T., "Report on optical theories", *Report of the 55th Meeting of the British Association for the advancements of science*, Aberdeen, September 1885, 157-261, London.
- 1886 TODHUNTER I., PEARSON K., *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the present time*, 1, Cambridge.
- 1887 IBBETSON W. J., *An Elementary Treatise on the Mathematical Theory of Perfectly Elastic Solids with a Short Account of Viscous Fluids*, London.
- 1887 VOIGT W., "Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle", *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 34, 3-100.
- 1887 VOIGT W., "Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Beryll und Bergkrystall", *Annalen der Physik und Chemie*, 31, 474-501; 701-724.
- 1888 AMAGAT É. H., "Sur la vérification expérimentale des formules de Lamé et la valeur du coefficient de Poisson", *Comptes rendus*, 106, 479-482.
- 1888 CANTONE M., "Nuovo metodo per la determinazione delle due costanti di elasticità", *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, IV ser., 4, 220-227; 292-297.
- 1888 CROTTI F., *La teoria dell'elasticità ne' suoi principî fondamentali e nelle sue applicazioni pratiche alle costruzioni*, Milano.
- 1888 VOIGT W., "Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Topas und Baryt", *Annalen der Physik und Chemie*, 34, 981-1028.
- 1888 VOIGT W., "Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Flussspath, Pyrit, Steinsalz, Sylvin", *Annalen der Physik und Chemie*, 35, 642-661.
- 1889 AMAGAT É. H., "Recherches sur l'élasticité et la compressibilité du mercure", *Journal de physique théorique et appliquée*, 8, II sér., 197-204, 359-368.
- 1889 AMAGAT É. H., "Recherches sur l'élasticité des solides", *Comptes rendus*, 108, 1199-1202.
- 1889 POINCARÉ H., *Leçons sur la théorie mathématique de la lumière*, Paris.
- 1889 VOIGT W., "Ueber die Beziehungen zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper", *Annalen der Physik und Chemie*, 38, 573-587.

- 1890 THOMSON W., "Molecular constitution of matter", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **16**, 693-724; letto il 1° e il 15 luglio 1889. Pubblicato anche in *Mathematical and Physical Papers*, **3**, 395-427, Cambridge, 1890.
- 1890 MATHIEU É., *Théorie de l'élasticité des corps solides*, Paris.
- 1890 THOMSON W., *Mathematical and Physical Papers*, **3**, *Elasticity, Heat, Electromagnetism*, London.
- 1892 LOVE A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge, **1**.
- 1892 POINCARÉ H., *Leçons sur la théorie de l'élasticité, redigées par MM. Emil Borel et Jules Drach*, Paris.
- 1893 THOMSON W., "On the elasticity of a crystal according to Boscovich", *Proceedings of the Royal Society of London*, **54 B**, 59-75; letto il 15 giugno 1893 alla Royal Society. Pubblicato anche come *Appendix I* nelle *Baltimore Lectures*, London, 1904.
- 1893 THOMSON W., *Nature*, **48**, 159.
- 1893 THOMSON W., *Conférences scientifiques et allocutions traduites et annotées sur la deuxième édition par P. Lugol avec des extraits de mémoires récents de sir W. Thomson et quelques notes par M. Brillouin, Constitution de la matière*, Paris.
- 1893 TODHUNTER I., PEARSON K., *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the present time*, **2**, Cambridge.
- 1893 VOIGT W., "Bestimmung der Elasticitätsconstanten einiger quasi-isotroper Metalle durch langsame Schwingungen von Stäben", *Annalen der Physik und Chemie*, **48**, 674-707.
- 1899 STRAUBEL C. R., "Ueber die Elasticitätszahlen und Elasticitätsmoduln des Glases", *Annalen der Physik und Chemie*, **68**, 369-413.
- 1900 VOIGT W., "Die gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Krystallelasticität. Referat für den internationalen physikalischen Congreß in Paris vom 6. bis 12. August 1900", *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 117-176. Anche in francese col titolo: "L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux", *Rapport présenté au Congrès international de Physique reuni à Paris en 1900*, 1-71, Paris, 1900.
- 1901 VOIGT W., "Ueber das numerische Verhältnis der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien nach der molecularen Theorie", *Annalen der Physik*, IV Folge., **4**, 187-196.
- 1902 THOMSON W., "Molecular Dynamics of a crystal", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*. Pubblicato anche come *Appendix J* nelle *Baltimore Lectures*, London, 1904.
- 1903 DUHEM P. M. M., *L'évolution de la mécanique*, Paris, 1903.
- 1904 MARCOLONGO R., *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, Milano, 1904.

- 1904 THOMSON W., *Baltimore Lectures on molecular dynamics and the wave theory of light*, London.
- 1907 MÜLLER C. H., TIMPE A., “Die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie”, *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, **4**, IV, 1-51, 1907-1914.
- 1908 AUERBACH F., “Elastizität im allgemeinen”, *Handbuch der Physik, herausgegeben von A. Winkelmann*, **1**, I, 497-544; “Elastizität der Kristalle”, *idem*, 670-709, Leipzig, 1908^{II}.
- 1908 BURKHARDT H., “Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik, IX Abschnitt, Die Anfänge der Elasticitätstheorie und die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen”, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **10**, II, 526-671, Leipzig.
- 1909 GUIDI C., *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni, II, Teoria dell'elasticità e resistenza dei materiali*, Torino, 1909^V.
- 1910 VOIGT W., *Lehrbuch der Kristallphysik*, Leipzig.
- 1912 BORN M., von KÁRMÁN Th., “Über Schwingungen in Raumgittern”, *Physikalische Zeitschrift*, **13**, 297-309.
- 1914 BORN M., “Zur Raumgittertheorie des Diamanten”, *Annalen der Physik*, **44**, IV Folge., 605-642, 1914.
- 1915 BORN M., *Dynamik der Kristallgitter*, Leipzig und Berlin.
- 1918 VOIGT W., “Struktur und Elasticitätstheorie regulärer Kristalle”, *Nachrichten von der Gasellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1918*, 121-170.
- 1921 GRÜNEISEN E., “Théorie moléculaire des corps solides”, *La structure de la matière, Rapports et discussions du Conseil de Physique tenu a Bruxelles du 27 au 31 octobre 1913*, 243-280, Paris.
- 1923 BORN M., “Atomtheorie des festen Zustandes”, *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, **5**, III, 527-781, 1909-1926.
- 1927 BORN M., BOLLNOW O. F., “Der Aufbau der Materie. Theoretische Grundlagen”, *Handbuch der Physik*, **24**, 370-465.
- 1927 BORN M., OPPENHEIMER R., “Zur Quantentheorie der Molekeln”, *Annalen der Physik*, IV Folge., **84**, 457-484.
- 1927 LOVE A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge, 1927^{IV}.
- 1928 JOFFÉ A.F., *The physics of crystals*, New York.
- 1929 EWALD P. P., “Der mechanische Aufbau des festen Körpers in atomistischer Betrachtung”, *Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, herausgegeben von E. Waetzmann*, **1**, II, 925-990, Braunschweig, 1929^{XI}.

- 1932 BORN M., MAYER J. E., "Zur Gittertheorie der Ionenkristalle", *Zeitschrift für Physik*, **75**, 1-18.
- 1933 BORN M., GÖPPERT-MAYER M., "Dynamische Gittertheorie der Kristalle", *Handbuch der Physik*, **24**, II, 623-794.
- 1935 FUCHS K., "A quantum mechanical investigation of the cohesive forces of metallic copper", *Proceedings of the Royal Society of London*, **151 A**, 585-599.
- 1936 FUCHS K., "A quantum mechanical calculation of the elastic constants of monovalent metals", *Proceedings of the Royal Society of London*, **153 A**, 622-639.
- 1936 FUCHS K., "The elastic constants and specific heats of the alkali metals", *Proceedings of the Royal Society of London*, **157 A**, 444-450.
- 1937 BRILLOUIN L., *La structure des corps solides dans la physique moderne*, Paris.
- 1940 BORN M., "On the stability of crystal lattices. I", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **36**, 160-172.
- 1940 BORN M., FÜRTH R., "The stability of crystal lattices. III, An attempt to calculate the tensile strength of a cubic lattice by purely static considerations", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **36**, 455-465.
- 1940 BORN M., MISRA R.D., "On the stability of crystal lattices. IV", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **36**, 466-478.
- 1940 MISRA R.D., "On the stability of crystal lattices. II", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **36**, 173-182.
- 1940 SEITZ F., *The modern theory of solids*, New York and London.
- 1942 FUCHS K., PENG H. W., "Crystal theory of metals: calculation of the elastic constants", *Proceedings of the Royal Society of London*, **180 A**, 451-476.
- 1946 BRILLOUIN L., *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, Paris, 1946^{II}.
- 1946 EPSTEIN P. S., "On the elastic properties of lattices", *Physical Review*, **70**, 915-922.
- 1946 HEARMON R. F. S., "The elastic constants of anisotropic materials-I", *Review of modern physics*, **18**, 409-440.
- 1947 BEGBIE G. H., BORN M., "Thermal scattering of X-rays by crystal. I, Dynamical foundation", *Proceedings of the Royal Society of London*, **188 A**, 179-188.
- 1947 ZENER C., "A defense of the Cauchy relations", *Physical Review*, **71**, 323.
- 1948 LÖWDIN P. O., *A theoretical investigation into some properties of ionic crystals. A quantum mechanical treatment of the cohesive energy, the interionic distance, the elastic constants, and the compression at high pressures with numerical applications to some alkali halides*, Uppsala.
- 1948 LÖWDIN P. O., "A quantum mechanical calculation of the cohesive energy, the interionic distance, and the elastic constants of some ionic crystals", *Arkiv för*

- Matematik, Astronomi och Fysik*, **35 A**, 9, 1-10; II, "The elastic constants c_{12} and c_{44} ", *Idem*, 30, 1-18.
- 1949 BHAGAVANTAM S., SURYANARAYANA D., "Crystal symmetries and physical properties. Application of group theory", *Acta Crystallographica*, **2**, 21-26.
- 1949 HUANG K., "Lattice theory of dielectric and piezoelectric constants in crystals", *Philosophical Magazine*, **40**, 733-747.
- 1950 HUANG K., "On the atomic theory of elasticity", *Proceedings of the Royal Society of London*, **203 A**, 178-194.
- 1950 STAKGOLD I., "The Cauchy relations in a molecular theory of elasticity", *Quarterly of applied mathematics*, **8**, 169-186.
- 1951 LAVAL J., "Élasticité des cristaux", *Comptes rendus*, **232**, I sem., 1947-1948.
- 1951 LEIBFRIED G., "Zur atomistischen Theorie der Elastizität", *Zeitschrift für Physik*, **129**, 307-316.
- 1951 WHITTAKER E., *A History of the Theories of Aether and Electricity*, London.
- 1952 LAVAL J., "Sur l'élasticité du milieu cristallin", *L'état solide: rapports et discussions du neuvième Conseil de Physique tenu à l'Université Libre de Bruxelles du 25 au 29 septembre 1951*, 273-312, Bruxelles.
- 1953 LE CORRE Y., "Détermination des sept constantes élastiques dynamiques du phosphate monoammonique", *Comptes rendus*, **236**, I sem., 1903-1904, 1953.
- 1953 LE CORRE Y., "Constantes élastiques et piézoélectriques cristallines", *Bulletin de la Société française de Minéralogie et de Cristallographie*, **67**, 464-479.
- 1953 TIMOSHENKO S. P., *History of Strength of Materials*, New York.
- 1954 BORN M., HUANG K., *Dynamical theory of crystal lattices*, Oxford.
- 1954 LAVAL J., "Théorie atomique de l'élasticité cristalline excluant les forces centrales", *Comptes rendus*, **238**, I sem., 1773-1775.
- 1954 LE CORRE Y., "Étude de l'élasticité et de la piézoélectricité cristallines. I, Désaccord entre l'expérience et la théorie de Voigt", *Bulletin de la Société française de Minéralogie et de Cristallographie*, **77**, 1363-1392.
- 1954 VISWANATHAN K.S., "The theory of elasticity and of wave-propagation in crystals from the atomistic standpoint", *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, **39 A**, 196-213.
- 1955 LEIBFRIED G., "Gittertheorie der mechanischen und termischen Eigenschaften der Kristalle", *Handbuch der Physik*, **7**, I, Kristallphysik I, 104-324, Berlin.
- 1955 LE CORRE Y., "Étude de l'élasticité et de la piézoélectricité cristallines. III, Théorie atomique de l'élasticité et de la piézoélectricité", *Bulletin de la Société française de Minéralogie et de Cristallographie*, **78**, 33-53; "IV, Théorie atomique de la piézoélectricité de la blende", *Idem*, 54-83.

- 1955 LUNDQVIST S. O., "On the limiting vibrational frequencies of a cubic ionic lattice", *Arkiv för Fysik*, **9**, 435-456.
- 1955 VISWANATHAN K. S., "The theory of elasticity of crystals", *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, **41 A**, 98-116.
- 1955 RAMAN C. V., VISWANATHAN K. S., "The elastic behaviour of isotropic solids", *Proc. Ind. Acad. Sc.*, **42 A**, 1-9; "On the theory of the elasticity of crystals", *Idem*, 51-70.
- 1955 RAMAN C. V., KRISHNAMURTI D., "Evaluation of the four elastic constants of some cubic crystals", *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, **42 A**, 111-130.
- 1956 BRILLOUIN L., PARODI M., *Propagation des ondes dans les milieux périodiques*, Paris.
- 1956 DE LAUNAY J., "The theory of specific heats and lattice vibration", *Solid state physics. Advances in research and applications*, **2**, 219-303.
- 1956 HEARMON R. F. S., "The elastic constants of anisotropic materials-II", *Advances in Physics. A quarterly supplement of the Philosophical Magazine*, **5**, 323-382.
- 1956 KITTEL C., *Introduction to Solid State Physics*, New York.
- 1956 LE CORRE Y., "La dissymétrie des tenseurs des efforts et ses conséquences", *Journal de physique et le radium*, **17**, 934-939.
- 1956 LÖWDIN P. O., "Quantum theory of cohesive properties of solids", *Advances in Physics. A quarterly supplement of the Philosophical Magazine*, **5**, 1-171.
- 1956 TIFFEN R., STEVENSON A. C., "Elastic isotropy with body force and couple", *Quarterly Journal of mechanics and applied mathematics*, **9**, 306-312.
- 1957 JOEL N., WOOSTER W. A., "Theories of crystal elasticity", *Nature*, **180**, 430-431.
- 1957 LAVAL J., "L'élasticité du milieu cristallin. I, L'énergie potentielle d'un cristal et les constantes de rappel atomiques", *Journal de physique et le radium*, **18**, 247-259.
- 1957 MASHKEVICH V. S., TOLPYGO K. B., "Electrical, optical and elastic properties of diamond type crystals. I", *Soviet Physics JETP*, **5**, 435-439; "II, Lattice vibrations with calculation of atomic dipole moments", *Idem*, 707-713.
- 1958 HUNTINGTON H. B., "The elastic constants of crystals", *Solid State Physics. Advances in research and applications*, **7**, 214-351.
- 1958 JOEL N., WOOSTER W. A., "Number of elastic constants required in crystal elasticity", *Nature*, **182**, 1078-1079.
- 1958 LE CORRE Y., "Les densités de couple et les pseudo-rotations dans la théorie de l'élasticité de Laval", *Journal de physique et le radium*, **19**, 541-547.
- 1958 McCLINTOCK F. A., "Interface couples in crystals", *Nature*, **182**, 652-653.

- 1958 SAINT-JAMES D., "Détermination des lois de forces dans les cristaux du type du diamant", *Journal of the physics and chemistry of solids*, **5**, 337-355.
- 1959 HERMAN F., "Lattice vibrational spectrum of germanium", *Journal of the physics and chemistry of solids*, **8**, 405-418.
- 1960 AERO E. L., KUVSHINSKII E. V., "Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles", *Fizika Tverdogo Tela*, 1399-1409; tradotto in *Soviet Physics Solid State*, **2**, 1271-1821, 1961.
- 1960 GRIOLI G., "Elasticità asimmetrica", *Annali di matematica pura ed applicata*, **50**, ser.IV, 1399-1409.
- 1960 JOEL N., WOOSTER W. A., "New measurements of elastic constants of ADP, and their relation to the theories of crystal elasticity", *Acta crystallographica*, **13**, 516-525.
- 1960 LEIBFRIED G., LUDWIG W., "Gleichgewichtsbedingungen in der Gittertheorie", *Zeitschrift für Physik*, **160**, 80-92.
- 1960 RAJAGOPAL E. S., "The role of initial stresses in lattice dynamics. II", *Annalen der Physik*, VII Folge., **6**, 176-181.
- 1960 TRUESDELL C., TOUPIN R. A., "The classical field theories", *Handbuch der Physik*, **3**, I, 226-858.
- 1961 AERO E. L., KUVSHINSKII E. V., "Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles", *Soviet Physics Solid State*, **2**, 1272-1281.
- 1961 HEDIN L. T., "A microscopic derivation of the Born-Huang relations between the atomic force constants", *Arkiv för Fysik*, **18**, 369-378.
- 1961 JAFFE H., SMITH C. S., "Elastic constants of Ammonium Dihydrogen Phosphate (ADP) and the Laval theory of crystal elasticity", *Physical Review*, **121**, 1604-1607.
- 1961 JOEL N., WOOSTER W. A., "On six new relations between the elastic constants of crystals", *Acta crystallographica*, **14**, 571-578.
- 1961 KRISHNAN R. S., RAJAGOPAL E. S., "The atomistic and the continuum theories of crystal elasticity", *Annalen der Physik*, VII Folge., **7**, 121-136.
- 1961 OSKOTSKII V. S., EFROS A. L., "On the theory of crystal lattices with noncentral interatomic interaction", *Soviet Physics Solid State*, **3**, 448-457.
- 1962 KAPLAN H., "Remarks on force-constant models for lattice dynamics", *Physical Review*, **125**, 1905-1910.
- 1962 MINDLIN R. D., TIERSTEN H. F., "Effects of couple-stresses in linear elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **11**, 415-448.
- 1962 TOUPIN R. A., "Elastic materials with couple-stresses", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **11**, 385-414.

- 1963 AERO E. L., KUVSHINSKII E. V., "Continuum theory of asymmetric elasticity. The problem of "internal" rotation", *Fizika Tverdogo Tela*, **5**, 2591-2598; tradotto in *Soviet Physics Solid State*, **5**, 1892-1897, 1964.
- 1964 AERO E. L., KUVSHINSKII E. V., "Continuum theory of asymmetric elasticity. Equilibrium of an isotropic bodies", *Fizika Tverdogo Tela*, **6**, 2689-2699; tradotto in *Soviet Physics Solid State*, **6**, 2141-2148, 1965.
- 1964 ERINGEN A. C., SUHUBI E. S., Non linear theory of micro-elastic solids-II, *International Journal of Engineering Science*, **2**, 389-404.
- 1964 GREEN A. E., RIVLIN R. S., "Multipolar continuum mechanics", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **17**, 113-147.
- 1964 LAVAL J., "Théories atomiques de l'élasticité du milieu cristallin", *Annales de l'Institut H. Poincaré*, **1 A**, 329-384.
- 1964 LUDWIG W., LENGELER B., "Surface waves and rotational invariance in lattice theory", *Solid state communications*, **2**, 83-86.
- 1964 MINDLIN R. D., "Micro-structures in linear elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 51-78.
- 1964 TOUPIN R. A., "Theories of elasticity with couple-stress", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **17**, 85-112.
- 1965 HILL R., "Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals", *Journal of mechanics and physics of solids*, **13**, 89-101.
- 1965 KRUMHANSL J. A., "Generalized continuum field representations for lattice vibrations", *Proceedings of the International Conference on Lattice Dynamics held at Copenhagen, Denmark, August 5-9, 1963*, 627-634, Oxford.
- 1965 LAX M., "The relation between microscopic and macroscopic theories of elasticity", *Proceedings of the International Conference on Lattice Dynamics held at Copenhagen, Denmark, August 5-9, 1963*, 583-596, Oxford.
- 1965 MINDLIN R. D., "Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity", *International Journal of solids and structures*, **1**, 417-438.
- 1965 TOUPIN R. A., GAZIS D. C., "Surface effects and initial stress in continuum and lattice models of elastic crystals", *Proceedings of the International Conference on Lattice Dynamics held at Copenhagen, Denmark, August 5-9, 1963*, 597-605, Oxford.
- 1965 WALLACE D. C., "Lattice dynamics and elasticity of stressed crystals", *Reviews of modern physics*, **37**, 57-67.
- 1966 DI PASQUALE S., "Fondamenti teorici per un metodo di calcolo approssimato dei corpi reticolari a maglie cubiche", *Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni della Facoltà di Architettura dell'Università di Napoli*, 1-66, Napoli.
- 1966 ERINGEN A. C., "Linear theory of micropolar elasticity", *J. Math. Mech.*, **15**, 909-924.

- 1966 ERINGEN A. C., "Mechanics of micromorphic materials", *Proc. XI Int. Cong. App. Mech.*, 131-138, Berlin.
- 1966 KEATING P. N., "Effect of invariance requirements on the elastic strain energy of crystals with application to the diamond structure", *Physical Review*, **145**, II ser., 637-645.
- 1966 LUZIN A.N., "Some problems in the dynamics of crystal lattices and of the theory of elasticity", *Soviet Physics JETP*, **23**, 615-620.
- 1966 TRUESDELL C., *Continuum Mechanics I. The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, The international science review series, **8**, New York-London-Paris.
- 1966 TRUESDELL C., "Polar and oriented media", *Six lectures on modern natural philosophy*, 23-34, Berlin-Heidelberg-New York.
- 1967 DI PASQUALE S., "On the elastic problem of the non-homogeneous anisotropic reticulated body resting on a lattice", *Meccanica*, **2**, 153-156.
- 1967 KEATING P. N., "On the sufficiency of the Born-Huang relations", *Physics Letters*, **25 A**, 496-497.
- 1967 LUDWIG W., "Recent developments in lattice theory", *Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften*, **43**, Berlin.
- 1967 MARIS H. J., ELBAUM C., "Validity of the Born-Huang relations in lattice dynamics", *Physics Letters*, **25 A**, 96-97.
- 1968 KRÖNER E., "Interrelations between various branches of continuum mechanics", *Mechanics of generalized continua. Proceedings of the IUTAM Symposium on the generalized Cosserat continuum and the continuum theory of dislocations with applications, Freudenstadt and Stuttgart*, 330-343, Berlin.
- 1968 KRUMHANSL J. A., "Some considerations of the relation between solid state physics and generalized continuum mechanics", *Mechanics of generalized continua. Proceedings of the IUTAM Symposium on the generalized Cosserat continuum and the continuum theory of dislocations with applications, Freudenstadt and Stuttgart*, 298-311, Berlin.
- 1968 KUNIN I. A., "The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocations", *Mechanics of generalized continua. Proceedings of the IUTAM Symposium on the generalized Cosserat continuum and the continuum theory of dislocations with applications, Freudenstadt and Stuttgart*, 321-329, Berlin.
- 1968 MINDLIN R. D., "Theories of elastic continua and crystal lattice theories", *Mechanics of generalized continua. Proceedings of the IUTAM Symposium on the generalized Cosserat continuum and the continuum theory of dislocations with applications, Freudenstadt and Stuttgart*, 312-320, Berlin.
- 1970 ERICKSEN J. L., "Nonlinear elasticity of diatomic crystals", *International Journal of solids and structures*, **6**, 951-957.

- 1970 MINDLIN R.D., "Lattice theories of shear modes of vibration and torsional equilibrium of simple-cubic crystal plates and bars", *International Journal of solids and structures*, **6**, 725-738.
- 1970 MUSGRAVE M. J. P., *Crystal acoustics. Introduction to the study of elastic waves and vibrations in crystals*, San Francisco.
- 1970 VALANIS C., "Elastic materials with particles with rotary inertia, long-range force, and polar interaction", *Recent advances in engineering science*, **5**, II, 209-234.
- 1971 BRADY K. J., "Lattice theory of face-shear and thickness-twist waves in face-centered cubic crystal plates", *International Journal of solids and structures*, **7**, 941-964.
- 1971 CHUNG G., "Lattice theory of face-shear and thickness-twist waves in face-centered cubic crystal plates", *International Journal of solids and structures*, **7**, 751-787.
- 1971 DI PASQUALE S., "Mechanical models of Cauchy-Poisson media", *Atti del 1° Congresso AIMETA, Udine 26-30 Giugno 1971*, **2**, parte II, 299-324.
- 1971 MARADUDIN A. A., MONTROLL E. M., WEISS G. H., IPATOVA I. P., "Theory of lattice dynamics in the harmonic approximation", *Solid State Physics*, Suppl. **3**, 1971^{II}.
- 1971 MILSTEIN F., "Theoretical strength of a perfect crystal", *Physical Review.*, **3B**, 1130-1141.
- 1972 ASKAR A., "Molecular crystals and the polar theories of the continua. Experimental values of materials coefficients for KNO_3 ", *International Journal of Engineering Science*, **10**, 293-300.
- 1972 ERINGEN A. C., EDELEN D. G. B., "On nonlocal elasticity", *International Journal of Engineering Science*, **10**, 233-248.
- 1972 ERINGEN A. C., "Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves", *International Journal of Engineering Science*, **10**, 425-435.
- 1972 MACMILLAN N. H., KELLY A., "The mechanical properties of perfect crystals", *Proceedings of the Royal Society*, **330 A**, 291-308, 309-317.
- 1972 MINDLIN R. D., "Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics", *Journal of elasticity*, **2**, 217-282.
- 1972 TORRENS I.M., *Interatomic potentials*, New York.
- 1973 BELL J. F., "The experimental foundations of solid mechanics", *Handbuch der Physik*, **6 a/ I**, *Festkörpermechanik I*, Berlin-Heidelberg-New York.
- 1973 MILSTEIN F., "Theoretical strength of a perfect crystal with exponentially attractive and repulsive interatomic interactions", *Journal of applied physics*, **44**, 3833-3840.
- 1973 SZABÓ I., "Die Grundlegung der linearen Elastizitätstheorie für homogene und isotrope Körper", *Technikgeschichte*, **40**, 301-336.

- 1974 HORTON G. K., MARADUDIN A. A. editors, *Dynamical properties of solids, 1, Crystalline solids, Fundamentals*, Amsterdam, 1974.
- 1974 SZABÓ I., “Die Geschichte der Materialkonstanten der linearen Elastizitätstheorie homogener isotroper Stoffe”, *Bautechnik*, **51**, 1-8.
- 1975 HILL R., “On the elasticity and stability of perfect crystals at finite strain”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **77**, 225-240.
- 1976 PARRY G. P., “On the elasticity of monoatomic crystals”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **80**, 189-211.
- 1976 SZABÓ I., “Die Entwicklung der Elastizitätstheorie im 19. Jahrhundert nach Cauchy”, *Bautechnik*, **53**, 109-116.
- 1977 ERICKSEN J. L., “Special topics in elastostatics”, *Advances in applied mechanics*, **17**, 189-244.
- 1977 MILSTEIN F., HILL R., “Theoretical properties of cubic crystals at arbitrary pressure. I. Density and bulk modulus”, *Journal of the mechanics and physics of solids*, **25**, 457-477.
- 1977 TRUESDELL C., *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, New York-San Francisco-London.
- 1978 MILSTEIN F., HILL R., “Theoretical properties of cubic crystals at arbitrary pressure. II. Shear moduli”, *Journal of the mechanics and physics of solids*, **26**, 213-239.
- 1978 PARRY G. P., “On diatomic crystals”, *International Journal of solids and structures*, **14**, 283-287.
- 1979 ERICKSEN J. L., “On the symmetry of deformable crystals”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **72**, 1-13.
- 1979 HARDY J. R., KARO A. M., *The lattice dynamics and statics of alkaly halide crystals*, New York and London.
- 1979 MILSTEIN F., HILL R., “Theoretical properties of cubic crystals at arbitrary pressure. III. Stability”, *Journal of the mechanics and physics of solids*, **27**, 255-279.
- 1980 MINAGAWA S., ARAKAWA K., YAMADA M., “Diamond crystals as Cosserat continua with constrained rotation”, *Physica sttus solidi (a)*, **57**, 713-718.
- 1980 TRUESDELL C., “Rapport sur le pli cacheté n° 126, paquet présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 1^{er} octobre 1827, par M. Cauchy, et contenant le Mémoire: *Sur l'équilibre et le mouvement intérieur d'un corps solide considéré comme un système de molécules distinctes les unes des autres*”, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, vie académie*, **291**, II sem., 33-37.
- 1981 ARNOLD D. H., “Poisson and mechanics”, *Siméon-Denis Poisson et la science de son temps*, 23-37, Palaiseau.
- 1981 BENVENUTO E., *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*, Firenze.

- 1981 TRUESDELL C., "Cauchy's first attempt at molecular theory of elasticity", *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, **1**, 133-143.
- 1982 BRÜESCH P., *Phonons: theory and experiments I. Lattice dynamics and models of interatomic forces*, Berlin.
- 1982 ERICKSEN J. L., "Changes in symmetry in elastic crystals", *Proc. of the IUTAM Symposium on finite elasticity* (Lehigh University, Bethlehem, PA, USA, august 10-15, 1980), 167-177.
- 1982 KUNIN I. A., *Elastic media with microstructure. I, One-dimensional models*, Berlin.
- 1983 ARNOLD D. H., "The Mécanique Physique of Siméon Denis Poisson: the evolution and isolation in France of his approach to physical theory (1800-1840)", *Archive for history of exact sciences*, **28**, 243-367.
- 1983 KUNIN I. A., *Elastic media with microstructure. II, Three-dimensional models*, Berlin.
- 1983-4 ARNOLD D. H., "The Mécanique Physique of Siméon Denis Poisson: the evolution and isolation in France of his approach to physical theory (1800-1840)", *Archive for history of exact sciences*, **29**, 37-94; 287-307.
- 1984-5 DAHAN DALMEDICO A., "La mathématisation des théories de l'élasticité par A.-L. Cauchy et les débats dans la physique mathématique française (1800-1840)", *Sciences et techniques en perspective*, **9**, 1-100.
- 1985 ASKAR A., *Lattice dynamics foundations of continuum theories. Elasticity, piezoelectricity, viscoelasticity, plasticity*, Singapore.
- 1987 SZABÓ I., *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Basel, 1987^{III}.
- 1988 AXELRAD D. R., MUSCHIK W. (eds), "Constitutive laws and microstructure", *Proceedings of the seminar Wissenschaftskolleg-Institut for advanced study, Berlin, February 23-24 1987*, Berlin.
- 1988 BECCHI A., *Radici storiche della teoria molecolare dell'elasticità, con particolare riguardo alla Theoria Philosophiae Naturalis di R. G. Boscovich*, tesi, Genova.
- 1988 BENVENUTO E., BECCHI A., "Sui principi di filosofia naturale che orientarono la ricerca di Saint-Venant", *Omaggio a Giulio Ceradini*, 125-133, Roma.
- 1989 BENVENUTO E., CORRADI M., PIGAFETTA G., *Contributi italiani alla scienza delle costruzioni*, in *La cultura filosofica e scientifica, II: La storia delle scienze*, Busto Arsizio, .875-938.
- 1989 DAHAN DALMEDICO A., "La notion de pression: de la métaphysique aux diverses mathématisations. Causalité et statut des hypothèses", *Revue d'histoire des sciences*, **42**, 79-108.
- 1989 DHOMBRES N. & J., *Naissance d'un nouveau pouvoir: sciences et savants en France 1793-1824*, Paris.

- 1990 GRATTAN-GUINNESS I., *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840. From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics*, Basel.
- 1990 MACPHERSON A. K., *Atomic mechanics of solids*, Amsterdam.
- 1991 BELHOSTE B., *Augustin-Louis Cauchy. A Biography*, New York.
- 1991 BENVENUTO E., *An Introduction to the History of Structural Mechanics*, New York.
- 1992 DAHAN DALMEDICO A., *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'École Française*, Paris.
- 1992 BENVENUTO E., FOCE F., “Alle origini della micro-meccanica dei materiali. Cenni storici al problema delle ‘relazioni di Cauchy’ ”, *Atti del Convegno Nazionale del Gruppo AIMETA di Meccanica dei Materiali e delle Strutture, (Amalfi 3-5 giugno 1991)*, 7-13.
- 1992 BENVENUTO E., CORRADI M., FOCE F., “Considerazioni critiche sulle cosiddette ‘relazioni di Cauchy’ ”, *Atti XI Congresso Nazionale AIMETA, Meccanica dei solidi e delle Strutture, (Trento 28 settembre-2 ottobre)*, 79-84.
- 1992 TRUESDELL C., “Cauchy and the modern mechanics of continua”, *Revue d'histoire des sciences*, **45**, 5-24.

Indice dei nomi

- d'Alembert J. Lerond, 65, 72
Amagat É.H., 102
Arago F., 30, 31
Arnold D.H., 1n, 18
Askar A., 130
Auerbach F., 1
Barré de Saint-Venant A.J.C., 5, 6, 9, 12, 14, 15, 16, 22; 29, 33, 41, 49, 52, 53, 54, 62, 64, 65, 70, 71, 72-81, 86, 90, 91, 92, 137
Becchi A., 5n, 72n
Beer A., 92
Begbie G.H., 118
Belhoste B., 37n
Bell J.F., 37, 102n
Belli G., 68n
Benvenuto E., 1n, 5n, 72n, 133n, 135n
Berthollet C.L., 5
Berthot P., 42n
Bollnow O.F., 112n
Bonnet O., 68n
Born M., 89, 110-119, 121, 122
Boscovich R.G., 4, 5, 33, 54, 80, 82, 85
Boussinesq J., 63-67, 75
Bragg L., 123
Bravais A., 82, 113
Brillouin L., 113, 118
Brillouin M., 83n
Burkhardt H., 1
Cagniard de la Tour C., 102
Campanella A., 135
Cantone M., 103
Carnot L.M.N., 9, 65, 72
Castigliano A., 94
Cauchy A.-L., 1, 3, 6-17, 22, 24, 29, 34, 35, 36, 37, 39, 43, 48, 49, 50, 63, 68, 76, 80, 105, 107, 113, 120,
Clapeyron B.P.E., 50, 67, 68n
Clausius R., 8, 38-42, 49, 80, 94, 135
Clebsch A., 62, 70, 72, 81
Colladon J.D., 50n
Cornu A., 102
Corradi M., 135n
Cosserrat E., 104, 128, 129
Cosserrat F., 104, 128, 129
Crosland M., 5n
Crotti F., 94
Dahan Dalmedico A., 1n, 9n, 38n
De Communes de Marsilly L.J.A., 93
De Launay J., 57
Di Pasquale S., 112n
Duhamel J.M.C., 12, 32
Duhem P., 101, 108, 128
Epstein P.S., 120, 121, 123
Ericksen J.L., 131
Eringen A.C., 130
Eulero L., 9, 27
Ewald P.P., 115n
Flamant A.A., 75n
Foce F., 133n, 135n
Fourier J.B.J., 12
Fox R., 5n
Fresnel A., 33n
Fuchs K., 57
Galilei G., 4
Grashof F., 93, 94
Grattan-Guinness I., 1n, 38n

Green G., 43-46, 62, 64, 68, 70, 71, 73, 74, 75, 81, 90, 96
 Grioli G., 128
 Guidi C., 95
 Haughton S., 32n
 Hearmon R.F.S., 126
 Hedin L.T., 124
 Hellinger E., 115n
 Hilbert D., 2
 Hill R., 122, 131
 Hooke R., 3
 Huang K., 118, 123
 Huntington H.B., 126
 Ibbetson W.J., 90n
 Jammer M., 72n
 Jellett J.H., 59-62, 84, 89
 Joel N., 128
 Kármán T. von, 111
 Kirchhoff G., 52, 69
 Kirsch G.E., 93
 Klang H., 102
 Krishnamurti D., 127n
 Kröner E., 129
 Krumhansl J.A., 130
 Krishnan R.S., 128
 Kunin I.A., 130
 Lagrange J.-L., 42
 Lamé G., 50, 67, 68n, 69-71
 Laplace P.S., 5, 18, 31
 Laval J., 123-126, 128
 Lax M., 124
 Laue M. von, 111
 Le Corre Y., 125, 126
 Leibfried G., 115
 Love A.E.H., 1, 2, 3, 69, 137
 Löwdin P.O., 75n
 Ludwig W., 115, 117, 119
 Lundqvist S.O., 75n
 Mach E., 44
 Macpherson A.K., 112n
 Marcolongo R., 95
 Maxwell J.C., 45, 50-53, 57, 90
 McClintock F.A., 128
 Menabrea F., 94
 Milstein F., 131
 Mindlin R.D., 130
 Moigno F.-N.-M., 76, 77
 Mossotti O.F., 68n
 Müller C.H., 1
 Musschenbroek P. van, 5
 Navier C.-L., 6, 9, 15, 18, 28-32, 36, 50, 52, 67, 70, 71, 76, 87, 90, 94, 95, 113
 Neumann C., 32
 Neumann F., 68n, 102
 Newton I., 5, 44, 64
 Nobili L., 68n
 Oersted, 50
 Oppenheimer R., 114n
 Padé H., 72n
 Paoli D., 68n
 Parry G.P., 131
 Pearson K., 9, 37, 46, 70, 81, 85, 89-93
 Piola G. 68n
 Poincaré H., 96-100, 117, 121
 Poisson S.-D., 6, 9, 18, 21, 22, 25, 26, 27, 28-33, 35, 39, 40, 41, 42, 48, 87, 101, 107, 130
 Rajagopal E.S., 128
 Raman C.V., 126
 Rankine W.J.M., 53-59, 67, 69, 77
 Regnault H.V., 35, 51n, 79
 Riccati J., 43
 Rossetti D., 4
 Savart F., 80
 Seitz F., 117n

Stakgold I., 121, 122, 123
Stevenson A.C., 128
Stokes G.G., 45, 46-49, 52, 53, 57, 82, 90, 110
Sturm J.C.F., 51n
Suhubi E.S., 130
Tait P.G., 43, 51
Thomson W., 43, 44, 51, 69, 81-89, 91, 110, 111,
113, 121
Tiersten H.F., 128
Tiffen R., 128
Timoshenko S.P., 69
Timpe A., 1
Todhunter I., 1, 89
Tonon M.L., 135n
Torrens I.M., 112n
Toupin R.A., 128
Truesdell C., 1n, 6, 9, 43, 128, 131, 137
Valanis C., 130
Viswanathan K.S., 126
Voigt W., 2, 39, 80, 93, 101-110, 111, 113, 132,
135, 137
Wertheim G., 8, 34-37, 38, 45, 50, 52, 68, 76
Weyrauch J.J., 90, 93
Whittaker E., 53
Wooster W.A., 127, 128
Zaoui A., 132
Zener C., 121, 123